# 2023-24学年春季学期“数理逻辑”期中作业

**1.** (1) 请给出群论的一阶语言$\mathbb{G}$.(10分)

(2) 请基于$\mathbb{G}$，表述群论基本定理（拉格朗日定理），即“对于任意一个有限群$G$,若$H$是$G$的子群,则$H$的阶数是$G$的阶数的约数”.(10分)

**2.** 定义逻辑连接词$\not\leftrightarrow$如下:

| $P$ | $Q$ | $P \not\leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $F$ |
| $T$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

(1)求证$A \not\leftrightarrow A$为永假式.(5分)

(2)求证$(A \not\leftrightarrow B) \vee (A \leftrightarrow B)$为永真式.(5分)

(3)求证$(A \not\leftrightarrow B)[\frac{t}{x}]_{M[\sigma]} = (A \not\leftrightarrow B)_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]}$,即替换引理可拓展至包含$\not\leftrightarrow$的一阶语言.(10分)

**3.** (1) 求证$\{\neg, \to\}$是连接词完全组.(5分)

(2) 求证$\{\wedge, \vee, \to\}$不为连接词完全组.(10分)

**4.** 请用$G$系统证明下列序贯可证.

(1) $\forall x.A \to \exists x.B \vdash \exists x.B, C$, 其中$x \notin FV(A)$.(5分)

(2) $\exists x.(A \to B) \vdash \exists x.\neg A, B$, 其中$x \notin FV(B)$.(5分)

(3) $\vdash (\exists x.(A \to B)) \to \forall x.(A \to B)$, 其中$x \notin FV(B)$.(5分)

**5.** 对于一阶语言公式$\varphi$: $(\forall x.(P(x) \to Q(x)) \wedge \exists x.(R(x) \wedge P(x))) \to (R(x) \to \neg Q(x))$, 其中$P$, $Q$, $R$为一元谓词符,请回答下列问题并证明你的结论.

(1) $\varphi$是否可满足;(5分)

(2) $\varphi$是否永真;(5分)

(3) $\vdash \varphi$是否有效;(5分)

**6.** 设$P_i$是一个$n$元谓词, 则对于任意一阶语言公式$\varphi$, 可以定义其对应的**无$P_i$公式**$[\varphi]_{P_i}$如下:

- $[t_1 \doteq t_2]_{P_i} = (t_1 \doteq t_2)$, “$t_1, t_2$”是项;
- $[P_k(t_1, ..., t_m)]_{P_i} = P_k(t_1, ..., t_m)$, 如果$P_k \neq P_i$, “$t_1, ..., t_m$”是项;
- $[P_k(t_1, ..., t_m)]_{P_i} = (t_1 \doteq t_1)$, 如果$P_k = P_i$, “$t_1, ..., t_m$”是项;
- $[(\neg A)]_{P_i} = (\neg [A]_{P_i})$;
- $[A * B]_{P_i} = ([A]_{P_i} * [B]_{P_i})$, $*$是“$\wedge, \vee, \rightarrow$”之一;
- $[Qx.A]_{P_i} = Qx.[A]_{P_i}$, $Q$是“$\forall, \exists$”之一;

(1)试求$[(\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists x.(R(x) \wedge P(x))) \rightarrow (R(x) \rightarrow \neg Q(x))]_P$.(5分)

(2$^\star$)对于公式集合$\Gamma$, 如果公式序列$\langle A_1, A_2, ..., A_n\rangle$满足教材定义9.3-(1)(2)关于证明序列的约束,则称该公式序列为$\Gamma$-证明. 设$P$是一个$n$元谓词, $\Gamma$为一有穷公式集合, 且$P$没有在$\Gamma$中的任何公式中出现. 请证明对于任意$\Gamma$-证明$\langle A_1, A_2, ..., A_n\rangle$, $\langle [A_1]_P, [A_2]_P, ..., [A_n]_P\rangle$亦是一个$\Gamma$-证明.(10分)