

2023-24学年春季学期“数理逻辑”课程作业二

1. 令 A 为如下一阶语言公式:

$\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists x.(R(x) \wedge Q(x)) \wedge \forall x.(S(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow \exists x.(P(x) \wedge S(x))$, 其中 P, Q, R 均为一元谓词符。请回答下列问题并证明你的结论。

(1) 请构造模型 $\mathbb{M}_1 = (M_1, I_1, \sigma_1)$ 使得 $A_{\mathbb{M}_1(\sigma)} = T$;

(2) 请构造模型 $\mathbb{M}_2 = (M_2, I_2, \sigma_2)$ 使得 $A_{\mathbb{M}_2(\sigma)} = F$ 。

2. 请使用一阶语言将下列推理过程符号化:

所有的哲学家都是大胡子, 有些逻辑学家是哲学家, 因此有些逻辑学家是大胡子。

并判断上述推理是否有效。

3. 请判断一阶语言公式 $(\forall x.(P(x, y)))[\frac{f(x, z)}{y}]$ 是否可满足。如果可满足则请给出语义证明; 如果不满足则请给出反例。

4. 设一阶语言公式 A 为 $\forall x.(P(x, y) \wedge \forall y.\exists z.(y \doteq f(z)) \vee (y \doteq x))$ 。

(1) 试求 $FV(A)$;

(2) 试求 $A[\frac{f(x)}{y}]$ 和 $A[\frac{f(x)}{x}]$ 。

5 请证明下列公式为永真式:

(1) $\forall x.A \leftrightarrow A[\frac{x}{x}]$;

(2) $(\neg \forall x.A) \leftrightarrow (\exists x.\neg A)$ 。

6 教材P.49 第22题。