南京大学
Nanjing University

第八讲 推理系统的可靠性和完全性

内容提要

- 推理系统的性质
  - 有效推理
- G'系统的可靠性和完全性
- G系统的可靠性
- G系统的完全性定理
  - 理论的协调性
  - Hintikka集
  - Henkin的完全性定理证明

Part1－ 推理系统的性质

有效的推理 ⊨

- 有效 validity
  - **推理过程在逻辑上是有正确性保障的**
  - 无论外部世界如何变换**（模型，结构，赋值）**，只要前提是对的，那么结论就一定是对的
- 有反例 counter-example
  - **推理过程存在逻辑链条的断裂**
  - 可以找到一个具体的场景**（模型，结构，赋值）**，使得前提都被满足，但是结论没有一个是对的

- 如果你考试满分且做完了家务，那么父母就带你去游乐园或者给你买玩具。

序贯的语义：有效与有反例

定义4.6 设 $\Gamma \vdash \Delta$ 为 *sequent*，Γ 为 $\{A_1, \ldots, A_n\}$，Δ 为 $\{B_1, \ldots, B_m\}$。$\Gamma \vdash \Delta$ 有效（记为 $\Gamma \vDash \Delta$）指

$$\vDash (\bigwedge_{i=1}^{n} A_i) \to (\bigvee_{j=1}^{m} B_j)。$$

这里

(1) 当 $n = 0, m \neq 0$ 时，即 Γ 空且 Δ 非空时，$\vDash \Delta$ 指 $\vDash (\bigvee_{j=1}^{m} B_j)$

(2) 当 $n \neq 0, m = 0$ 时，即 Δ 空时，$\Gamma \vDash$ 指 $\vDash \neg(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i)$

(3) 当 $n = 0, m = 0$ 时，即 Γ, Δ 皆空，约定 $\{\} \vdash \{\}$ 非有效。

$\Gamma \vdash \Delta$ 有反例指 $\Gamma \vdash \Delta$ 非有效。

命题4.7 (1) $\underline{A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m \text{ 有效}}$

iff 对任何 $\mathfrak{M}$ 和 σ，$M \vDash_\sigma \neg A_i$ *for some* $i \in \{1, \ldots, n\}$

或 $M \vDash_\sigma B_i$ *for some* $j \in \{1, \ldots, m\}$

(2) $\underline{A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m \text{ 有反例}}$

iff 存在 $\mathfrak{M}$ 和 σ 使 $\mathfrak{M} \vDash_\sigma A_i$ *for all* $i \in \{1, \ldots, n\}$

且 $\mathfrak{M} \vDash_\sigma \neg B_j$ *for all* $j \in \{1, \ldots, m\}$

两个推理系统

- 系统1： $A \vdash B$
  - 对于任意公式A，能够推出任意公式B
  - 推理能力很强，但是推理非常不可靠

- 系统2： $A \vdash A$
  - 对于任意公式A，只能够推导出其自身
  - 推理能力很弱，但是推理非常可靠

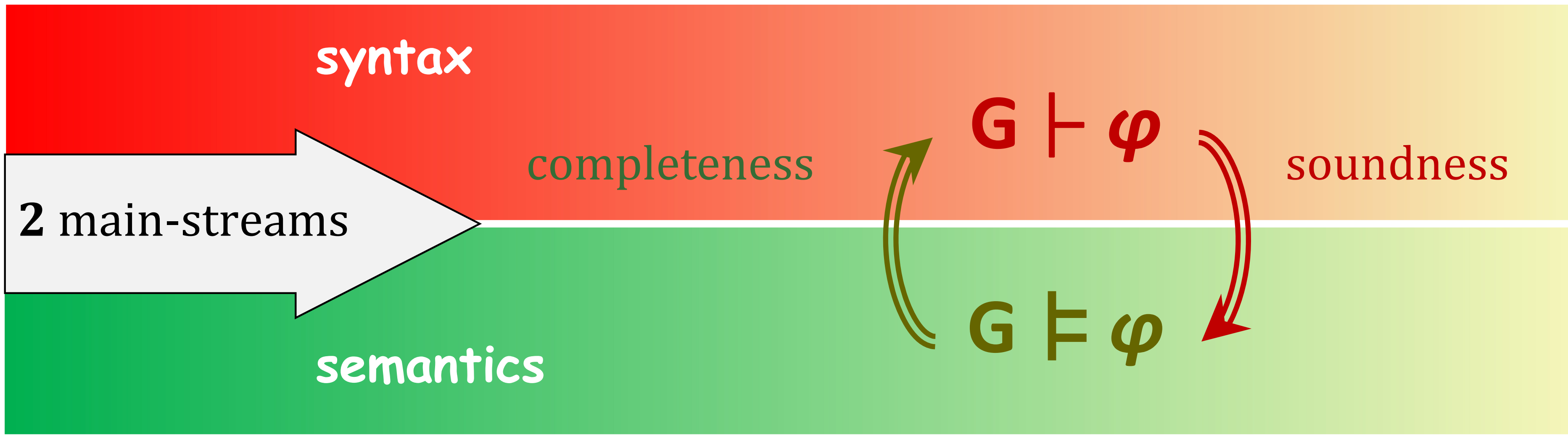
推理系统的性质

- **可靠性 soundness**：推理过程不会出错

  如果 $\Gamma \vdash \Delta$，那么 $\Gamma \vDash \Delta$

- **完全性 completeness**：推理能力没有缺陷

  如果 $\Gamma \vDash \Delta$，那么 $\Gamma \vdash \Delta$



Part2- G'系统的可靠性和完全性

G'的有效性

定理1.23 (G' 的 Soundness). 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G' 中可证，则 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效。

证明: 下面对 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树的结构归纳证明 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效，即 $\Gamma \vDash \Delta$。

$\Gamma \vdash \Delta$ 为公理，易见 $\Gamma \vDash \Delta$。先设下面的 (R_1) 和 (R_2) 不是规则 cut。

情形1: $$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta}(R_1)$$ 由 I.H.知 $\Gamma_1 \vDash \Delta_1$，从而由引理1.20 知 $\Gamma \vDash \Delta$。

情形2: $$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta}(R_2)$$ 由 I.H. 知$\Gamma_1 \vDash \Delta_1$，$\Gamma_1 \vDash \Delta_1$，
从而由引理1.20知$\Gamma \vDash \Delta$。

情形3: 设 Γ 为 Γ_1, Γ_2 且 Δ 为 Δ_1, Δ_2， $$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad \Gamma_2, A \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta}(cut)$$

由 I.H.知$\Gamma_1 \vDash \Delta_1, A$ 且 $\Gamma_2, A \vDash \Delta_2$。反设非 $\Gamma \vDash \Delta$，即有 v 反驳$\Gamma \vDash \Delta$。

1. 当 $v(A) = T$ 时，v 反驳 $\Gamma_2, A \vdash \Delta_2$，矛盾！
2. 当 $v(A) = F$ 时，v 反驳 $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A$，矛盾！

故 $\Gamma \vDash \Delta$.

□

G'的完全性

定理1.24 (G'的completeness).若 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效，则 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G' 中可证。

*证明:*设 m 为 $\Gamma \vdash \Delta$ 中联结词出现的个数，以下对 m 作归纳证明

(*):在 G' 中存在 $\Gamma \vdash \Delta$ 的一个无 cut 证明树，其中规则个数 $< 2^m$.

当 $m = 0$ 时，$\Gamma \vdash \Delta$ 中无联结词，故呈形 $P_1, \cdots, P_n \vdash Q_1, \cdots, Q_n$，$P_i, Q_j$ 均为命题符，$\because \Gamma \vDash \Delta$，$\therefore$ 必有一个 P 同时出现于 $\Gamma \vdash \Delta$ 的左右两边，从而 $\Gamma \vdash \Delta$ 为公理，它有证明树，其中无规则。故(*)成立.

对于 $m > 0$，我们将按照联结词在 Γ, Δ 中最外位置的情形来证明(*)

情形1. 设 Γ 为 $\neg A, \Gamma'$. 我们可作 $\Gamma \vdash \Delta$ 的推理如下：

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma' \vdash \Delta}$$

$\because \Gamma \vDash \Delta$,

$\therefore$ 由引理 1.20，$\Gamma' \vDash \Delta, A$，而 $\Gamma' \vDash \Delta, A$ 中联结词出现的个数 $\leq m-1$，

从而由 I.H.知 $\Gamma' \vDash \Delta, A$ 有一个无 cut 证明，其中规则个数 $< 2^{m-1}$，

因此 $\Gamma \vdash \Delta$ 有一个无cut证明，其中规则个数 $< 2^{m-1} + 1 \leq 2^m$.

情形2. 设 Δ 为 $\neg B, \Delta'$.与情形 1 同理.

情形3. 设 Γ 为 $A \wedge B, \Gamma' \vDash \Delta$，我们有推理

$$\frac{A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma' \vdash \Delta}$$

从而由引理1.20，$A, B, \Gamma' \vDash \Delta$，

由 I.H.知 $A, B, \Gamma' \vDash \Delta$ 有无 cut 证明树，其中规则个数 $< 2^{m-1}$，

因此 $\Gamma \vdash \Delta$ 有无 cut 证明树，其中规则个数 $< 2^{m-1} + 1 \leq 2^m$.

情形4. 设 Δ为$\Delta', A \wedge B$，我们有推理

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta', A \quad \Gamma \vdash \Delta', B}{\Gamma \vdash \Delta', A \wedge B}$$

$\therefore$ 由引理 1.20，$\Gamma \vDash \Delta', A$ 且 $\Gamma \vDash \Delta', B$。

而 $\Gamma \vdash \Delta', A$ 与 $\Gamma \vdash \Delta', B$ 中的联结词出现的个数 $\leq m - 1$，

故由 I.H. 知 $\Gamma \vdash \Delta', A$ 和 $\Gamma \vdash \Delta', B$ 皆有一个无 cut 证明，
其中规则数 $< 2^{m-1}$，

从而 $\Gamma \vdash \Delta$ 有 无 cut 证明，
其中规则数 $\leq (2^{m-1} - 1) + (2^{m-1} - 1) + 1 < 2^m$.

其余情况同理可证.归纳完成. $\square$

Part3- G系统的可靠性

G公理的有效性

引理4.8 G *的公理有效*

证. 易见。 $\square$

G规则保持有效

引理4.9 *对于除 cut 外* $\boldsymbol{G}$ *的规则，所有 upper sequent 有效 iff 相应的 lower sequent 有效。*

证. 只需证对规则 R，the lower sequent 有反例

iff 至少有一个 upper sequent 有反例。

case $\neg L$: $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Lambda}{\Gamma, \neg A \vdash \Lambda}$

设 Γ 为 $\{A_1, \ldots, A_m\}$， Λ 为 $\{B_1, \ldots, B_n\}$。

$\Gamma, \neg A \vdash \Lambda$ 有反例

$\Longleftrightarrow$ 存在 $\mathfrak{M}$ 和 σ 使 $\mathfrak{M} \models_\sigma A_i$ for all $i \leq m$

且 $M \models_\sigma \neg B_j$ for all $j \leq n$ 且 $\mathfrak{M} \models_\sigma \neg A$

$\Longleftrightarrow$ $\Gamma \vdash A, \Lambda$ 有反例。

其他情况同理可证 $\square$

引理4.10 *对于 cut*: $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Lambda \qquad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$,

若 $\Gamma \vdash A, \Lambda$ 和 $\Delta, A \vdash \Theta$ 有效，则 $\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$ 有效。反之不然。

证. $\because \Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$ 有反例

$\Longrightarrow$ 有 $\mathfrak{M}$ 和 σ 使，Γ, Δ 中公式皆真，而 Λ, Θ中公式皆假

$\Longrightarrow$ 当 $\mathfrak{M} \models_\sigma A$ 时, $\Delta, A \vdash \Theta$有反例
当 $\mathfrak{M} \models_\sigma \neg A$ 时, $\Gamma \vdash A, \Lambda$有反例

$\Longrightarrow$ upper sequents 之一有反例

$\therefore$ 2个 upper sequents 皆有效 $\Longrightarrow$ the lower sequent 有效。

反之不然,反例: $\dfrac{\vdash \neg(A \vee \neg A) \qquad \neg(A \vee \neg A) \vdash (A \vee \neg A)}{\vdash A \vee \neg A}\text{cut}$

$\vdash A \vee \neg A$ 有效，但 $\vdash \neg(A \vee \neg A)$ 不然。 $\Box$

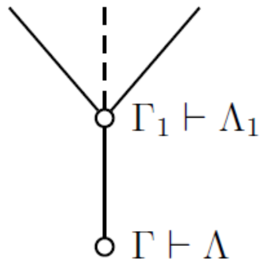
G系统的可靠性

定理 4.11 (Soundness).*若* $\Gamma \vdash \Delta$ *则* $\Gamma \vDash \Delta$，*从而* $\vdash A \Rightarrow \vDash A$。

证. 对 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树的结构作归纳。证明 $\Gamma \vdash \Delta \cdots (*)$

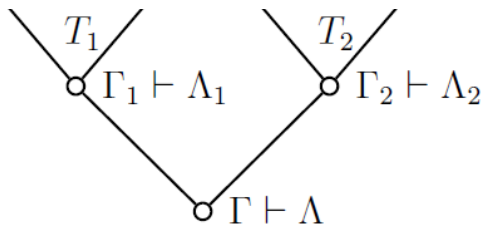
(1) $\Gamma \vdash \Delta$ 为公理，则易见 $\Gamma \vDash \Delta$ (by 引理4.8)

(2) $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树呈形：



由 I.H. 知，$\Gamma_1 \vDash \Lambda_1$ 从而 $\Gamma \vDash \Delta$ (by 引理4.9)

(3) $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树呈形：



由 I.H. 知，$\Gamma_1 \vDash \Lambda_1$，$\Gamma_2 \vDash \Lambda_2$ 从而 $\Gamma \vDash \Delta$ (by 引理4.9)

故 $\Gamma \vDash \Delta$。 □

命题4.12 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 则 $\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Psi$。

证. 对 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明结构作归纳。

Basis. $\Gamma \vdash \Delta$ 为公理，从而 $\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Psi$ 亦然。

I.H. 设(1) $\dfrac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta} R_1$ 或(2) $\dfrac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta} R_2$

且 $\Gamma', \Theta \vdash \Delta', \Psi$，$\Gamma'', \Theta \vdash \Delta'', \Psi$ 可证，

这里 R_1 和 R_2 为 **G** 规则。

Ind. Step. $\because$ $\dfrac{\Gamma', \Theta \vdash \Delta', \Psi}{\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Psi} R_1$

或 $\dfrac{\Gamma', \Theta \vdash \Delta', \Psi \qquad \Gamma'', \Theta \vdash \Delta'', \Psi}{\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Psi} R_2$

由 I.H.知 $\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Psi$ 可证。 $\square$

Part4- G系统的完全性定理

形式逻辑的圣杯：完全性定理

如果完全性定理成立，意味着数学家可以仅仅通过符号推演，就能够触及所有数学真理

- 希尔伯特：形式逻辑是否足以捕捉所有的数学推理步骤？
  - 此处的形式逻辑是指一阶语言+Hilbert系统
  - **《理论逻辑基础》1928**

- 完全性定理的本质：
  - **模型存在定理：** 语法协调 ⟺语义可满足
  - **$\Gamma \nvdash A$：** 语法层面是无法推导出矛盾
  - **$\Gamma \nvDash A$：** 语义层面是存在可满足模型
  - **困难度：** 如果图纸没有违反标准，那么能够建造出宇宙旅馆

哥德尔完全性定理

- 哥德尔完全性定理 Gödel's Completeness Theorem

对于一阶逻辑中的任何理论Γ和任意公式A，

如果$\Gamma \vDash A$，那么$\Gamma \vdash A$。

- 证明思路：从一阶语言到命题逻辑的“归约”
  - 逆否命题：如果$\Gamma \vdash A$不可证，那么$\Gamma \vDash A$存在反例。
    - $\{\Gamma, \neg A\}$可满足，而$\Gamma \wedge \neg A$可满足和$\Gamma \vDash A$不可同时成立
  - 构造公式$\Gamma \wedge \neg A$的可满足模型
    - 将公式转化为**斯科伦范式** (定义7.6)
    - 对斯科伦范式做**Herbrand展开**，将其转化为一个无穷长的命题逻辑公式序列（定义7.13）
    - 利用**紧性定理（原型）**证明该公式序列可满足

Henkin's Proof

- 证明$\Gamma\wedge\neg A$可满足和$\Gamma\models A$不可同时成立
- 核心思想：利用协调集Γ，构造可满足模型
  - **Lindenbaum扩充**：从Γ出发，构造一个“包含所有命题”的极大协调集Ψ
    - 对于任何问题A，Ψ均可以回答“是”或者“否”
  - **消除模糊性**：对于Ψ中所有使用了存在$\exists x(P(x))$的问题，引入新常量c替换x
  - **构造可满足模型**：利用所有闭项 (由常元构造的项，c, $f(c)$, …)，组成论域

Lindenbaum & Hintikka

- **Lindenbaum引理**
  - 任何协调的一阶语言公式集，均可以扩充为一个极大协调集
  - Lindenbaum-Tarski代数
    - A, $\neg\neg A$, $A \wedge (B \vee \neg B)$

- **Hintikka集**
  - 如果一个集合是向下饱和的 (downward saturated), 那么这个集合可满足
  - 如果 $A \wedge B \in \Gamma$ ，那么$A \in \Gamma$且$B \in \Gamma$
  - 2005年罗尔夫·肖克奖得主

Part4.1- 协调性

协调性

设$\mathscr{L}$为一阶语言，我们采用的语言是可数语言，即变元集为可数无穷集，从而全体项之集和全体公式之集皆为可数无穷集。

定义6.1 设Γ为公式集

1) Γ矛盾指存在Γ的有穷集Δ使$\Delta\vdash$在G中可证；

2) Γ协调指Γ不矛盾；

3) Γ协调（consistent）记为$Con(\Gamma)$, Γ矛盾记为$Incon(\Gamma)$.

不协调集Incon(Γ)的特性

命题6.2. 以下四点等价：

1) $Incon(\Gamma)$；

2) 存在公式A,存在Γ的有穷子集Δ,使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证；

3) 对任何公式A,存在Γ的有穷子集Δ,使$\Delta \vdash A$;

4) 对任何公式A,存在Γ的有穷子集Δ,使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证。

证明:

$(1) \Rightarrow (2)$: 因为 $\Delta \vdash$ 可证 $\Rightarrow$ $\Delta \vdash A$ 且 $\Delta \vdash \neg A$ 可证;

$(2) \Rightarrow (3)$:

因为 $\Delta \vdash A$ 且 $\Delta \vdash \neg A$ 可证 $\Rightarrow \Delta \vdash$ 可证 $\Rightarrow \Delta \vdash B$可证;

$(3) \Rightarrow (4)$ 易见;

$(4) \Rightarrow (1)$: 因为 $\Delta \vdash A$, $\Delta \vdash \neg A$ 可证 $\Rightarrow$ $\Delta \vdash$ 可证。

$\square$

协调集Con (Γ) 的特性

我们同理可证：

命题6.3. 设Γ为公式集，以下四点等价：

1) $Con(\Gamma)$；

2) 对任何 Γ 的有穷子集Δ, $\Delta \vdash$在G中不可证；

3) 对任何公式A,对任何 Γ 的有穷子集Δ，
$\Delta \vdash A$不可证或$\Delta \vdash \neg A$不可证；

4) 存在公式A,使对任何 Γ 的有穷子集Δ，$\Delta \vdash A$不可证。

极大协调集

定义6.4. 设Γ为公式集,Γ为极大协调的($maximally\ consistent$)指

1) $Con(\Gamma)$和

2) 对任何公式集 Δ, 若$Con(\Delta)$ 且 $\Gamma \subseteq \Delta$ 则 $\Gamma = \Delta$.

极大协调集的判定(1)

命题6.5. Γ为极大协调的 iff

1) $Con(\Gamma)$和

2) 对任何公式 A, 若$Con(\Gamma \cup \{A\})$ 则 $A \in \Gamma$.

证明:

"$\Rightarrow$" 设 Γ 为极大协调,从而 $Con(\Gamma)$, 现设 $Con(\Gamma \cup \{A\})$, 因为 $\Gamma \cup \{A\} \supseteq \Gamma$, 故 $\Gamma \cup \{A\} = \Gamma$, 因此 $A \in \Gamma$.

"$\Leftarrow$" 设 $Con(\Gamma)$ 且对任何 A 有 $Con(\Gamma \cup \{A\}) \Rightarrow A \in \Gamma$, 现设 $Con(\Delta)$ 且 $\Gamma \subseteq \Delta$, 反设 $\Gamma \neq \Delta$, 从而有 $A \in \Delta - \Gamma$; $\because$ $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \Delta$, 从而 $Con(\Gamma \cup \{A\})$, 故 $A \in \Gamma$ 矛盾。

□

极大协调集的判定(2)

命题6.6. 设Γ为极大协调的 iff

1) $Con(\Gamma)$和

2) 对任何公式 A, $A \in \Gamma$ 或 $\neg A \in \Gamma$.

证明:

“$\Rightarrow$”：设 Γ 极大协调, 1)易见；2)对于A, 反设 $A \notin \Gamma$ 且$\neg A \notin \Gamma$.
从而由命题6.5 知 $Incon(\Gamma \cup \{A\})$ 且 $Incon(\Gamma \cup \{\neg A\})$
从而存在Δ_1和Δ_2,其为Γ的有穷子集使$\Delta_1, A \vdash$ 和 $\Delta_2, \neg A \vdash$可证，从而 $\Delta_1, \Delta_2 \vdash$ 可证，因此$Incon(\Gamma)$ 矛盾！

“$\Leftarrow$”：设 1)和2),由命题6.5 我们只需证若$Con(\Gamma \cup \{A\})$,则$A \in \Gamma$,
由2)知 $A \in \Gamma$ 或 $\neg A \in \Gamma$ 成立，而 $\neg A \in \Gamma$ 与$Con(\Gamma \cup \{A\})$矛盾，故 $\neg A \notin \Gamma$,因此 $A \in \Gamma$. □

极大协调集的语义结论

命题6.7. 设 Γ 为极大协调集，A 为公式，

存在 Γ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \vdash A$ 可证 iff $A \in \Gamma$.

证明: "$\Rightarrow$"：设 $\Delta \vdash A$ 可证，从而$Con(\Gamma \cup \{A\})$,

若不然$Incon(\Gamma \cup A)$,则存在 Γ 的有穷子集 Δ' 使 $\Delta', A \vdash$可证，

故$\Delta, \Delta' \vdash$ 可证与 $Con(\Gamma)$ 矛盾！故$A \in \Gamma$。

"$\Leftarrow$"：易见。

$\square$

协调性与可满足性

命题6.8.

1) 若 Γ 可满足，则 $Con(\Gamma)$；

2) 若 Γ 矛盾，则 Γ 不可满足.

证明: 1) 设 Γ 可满足,从而有 $\mathbb{M}$ 和 σ 使 $\mathbb{M} \vDash_\sigma \Gamma$,反设 $Incon(\Gamma)$, 从而存在有穷 $\Delta \subseteq \Gamma$ 使 $\Delta \vdash A \wedge \neg A$ 可证。
$\because \mathbb{M} \vDash_\sigma \Gamma$, $\therefore \mathbb{M} \vDash_\sigma \Delta$, 从而 $\mathbb{M} \vDash_\sigma A \wedge \neg A$ 矛盾。

2)为1)的逆否命题。

□

协调性与可证

命题6.9. 设 Γ 为有穷公式集且 $Con(\Gamma)$

1) 若 $\Gamma \vdash A$ 可证，则 $Con(\Gamma \cup \{A\})$;

2) 若 $\Gamma \vdash A$ 不可证，则 $Con(\Gamma \cup \{\neg A\})$.

证明:

1) 设 $\Gamma \vdash A$且$Con(\Gamma)$, 反设$Incon(\Gamma \cup \{A\})$,从而 $\Gamma, A \vdash$ 可证，故 $\Gamma \vdash$ 可证与 $Con(\Gamma)$ 矛盾！

2) 若 $Incon(\Gamma \cup \{\neg A\})$ 则 $\Gamma, \neg A \vdash$ 可证，从而 $\Gamma \vdash A$ 可证。 $\square$

Part4.2- Hintikka集及其可满足性

Hintikka集-定义

定义3.25 设$\mathscr{L}$为一阶语言，Ψ为$\mathscr{L}$的公式集.令T为全体$\mathscr{L}$项之集。Ψ为Hintikka集指：

1. 若公式A为原子的，则A和$\neg A$不能都属于Ψ.
2. 若$\neg\neg A \in \Psi$，则$A \in \Psi$.
3. 若$A \to B \in \Psi$，则$\neg A \in \Psi$或$B \in \Psi$.
4. 若$\neg(A \to B) \in \Psi$，则$A \in \Psi$且$\neg B \in \Psi$.
5. 若$A \wedge B \in \Psi$，则$A \in \Psi$且$B \in \Psi$.
6. 若$\neg(A \wedge B) \in \Psi$，则$\neg A \in \Psi$或$\neg B \in \Psi$.
7. 若$A \vee B \in \Psi$，则$A \in \Psi$或$B \in \Psi$.
8. 若$\neg(A \vee B) \in \Psi$，则$\neg A \in \Psi$且$\neg B \in \Psi$.
9. 若$A \leftrightarrow B \in \Psi$，则$A \in \Psi$ iff. $B \in \Psi$.
10. 若$\neg(A \leftrightarrow B) \in \Psi$，则$A \in \Psi$ iff. $\neg B \in \Psi$.

11. 若$\forall x.A \in \Psi$，则$A[\frac{t}{x}] \in \Psi$ for all $t \in T$.
12. 若$\neg\forall x.A \in \Psi$，则$\neg A[\frac{t}{x}] \in \Psi$ for some $t \in T$.
13. 若$\exists x.A \in \Psi$，则$A[\frac{t}{x}] \in \Psi$ for some $t \in T$.
14. 若$\neg\exists x.A \in \Psi$，则$\neg A[\frac{t}{x}] \in \Psi$ for all $t \in T$.
15. $t \doteq t \in \Psi$ for all $t \in T$.
16. $t \doteq s \rightarrow s \doteq t \in \Psi$ for all $t, s \in T$.
17. $t \doteq s \rightarrow (s \doteq u \rightarrow t \doteq u) \in \Psi$ for all $t, s, u \in T$.
18. 若f为n元函数，$t_1, \ldots, t_n$，$s_1, \ldots, s_n$为项，则

$$(\wedge_{i=1}^{n} t_i \doteq s_i) \rightarrow f(\overrightarrow{t}) \doteq f(\overrightarrow{s}) \in \Psi.$$

19. 若p为n元谓词，$t_1, \ldots, t_n$，$s_1, \ldots, s_n$为项，则

$$\overrightarrow{t} = \overrightarrow{s} \rightarrow (p(\overrightarrow{t}) \rightarrow p(\overrightarrow{s})) \in \Psi$$

Hintikka集的可满足性

定理3.26. 若Ψ为Hintikka集，则Ψ可满足.

下面我们来证明该定理.

定义3.27 定义T上的二元关系$\sim$如下：

$$s \sim t\text{指}s \doteq t \in \Psi$$

命题3.28 $\sim$为等价关系.(证明留作习题)

命题3.29 设$t \in T$，令$[t]$为t关于$\sim$的等价类，从而

$$[s] = [t] \quad \textit{iff} \quad s \sim t.$$

项的等价关系

引理3.30 设$[t_i] = [s_i](i = 1, 2, ..., n)$,则

1. 对任何n元函数f, $[f(\overrightarrow{t})] = [f(\overrightarrow{s})]$

2. 对任何n元谓词p,若$p(\overrightarrow{t}) \in \Psi$则$p(\overrightarrow{s}) \in \Psi$

证 由定义直接证明.

1. 设$t \sim s$且f为一元函数，欲证$f(t) \sim f(s)$,

   即$f(t) \doteq f(s) \in \Psi$,

   $\because t \doteq s \in \Psi$且$t \doteq s \to f(t) \doteq f(s) \in \Psi$

   $\therefore f(t) \doteq f(s) \in \Psi$, n元函数同理可证.

2. 与1同理. $\square$

Hintikka集的模型 (典范模型 Canonical Model)

定义3.31 模型$\mathbb{H}=(H,\sigma)$定义如下:$H=\{[t]\mid t$为$\mathscr{L}$之项$\}$.

1. c为常元,$c_H=[c]$。
2. f为n元函数,$f_H([t_1],...,[t_n])=[f(t_1,...t_n)]$。
3. p为n元谓词,$p_H([t_1],...,[t_n])$真 *iff* $p(t_1,...,t_n)\in\Psi$。
4. $\sigma(x)=[x]$, 当x为变元。

引理3.30保证定义的合法性.

引理3.32 对任何t, $t_{H[\sigma]}=[t]$.

证明: 对t的结构归纳即可。 $\square$

引理3.33 $H \models_\sigma \Psi$，即Ψ可满足.

证 对公式A的结果作归纳证明.

(a) 若$A \in \Psi$，则$A_{H[\sigma]} = T$；(b) 若$\neg A \in \Psi$，则$A_{H[\sigma]} = F$.

Case. Atom. (1.1) A为$p(t)$（n元同理）.

$\because A \in \Psi \Rightarrow p(t) \in \Psi \Rightarrow p_H([t])$真$\Rightarrow [p(t)]_{H[\sigma]} = T$ $\therefore$(a)成立.

$\because \neg A \in \Psi \Rightarrow p(t) \notin \Psi \Rightarrow P_H([t])$假$\Rightarrow [p(t)]_{H[\sigma]} = F$ $\therefore$(b)成立.

(1.2) A为$s \doteq t$

$\because s \doteq t \in \Psi \Rightarrow [s] = [t] \Rightarrow s_{H[\sigma]} = t_{H[\sigma]}$

$\Rightarrow (s \doteq t)_{H[\sigma]} = T$ $\therefore$(a)成立.

$\because \neg(s \doteq t) \in \Psi \Rightarrow (s \doteq t) \notin \Psi \Rightarrow [s] \neq [t] \Rightarrow s_{H[\sigma]} \neq t_{H[\sigma]}$

$\Rightarrow (\neg s \doteq t)_{H[\sigma]} = T$ $\therefore$(b)成立.

Case. $\neg$. A为$\neg B$.

$$A \in \Psi \Rightarrow \neg B \in \Psi \quad \Rightarrow [B]_{H[\sigma]} = F \quad \Rightarrow [A]_{H[\sigma]} = T.$$

$$\neg A \in \Psi \Rightarrow \neg\neg B \in \Psi \Rightarrow B \in \Psi \Rightarrow [B]_{H[\sigma]} = T \Rightarrow [A]_{H[\sigma]} = F.$$

Case. $\wedge$. A为$B \wedge C$.

$$B \wedge C \in \Psi \quad \Rightarrow B, C \in \Psi \quad \Rightarrow [B]_{H[\sigma]} = [C]_{H[\sigma]} = T$$
$$\Rightarrow [B \wedge C]_{H[\sigma]} = T.$$

$$\neg(B \wedge C) \in \Psi \quad \Rightarrow \neg B \in \Psi \text{或} \neg C \in \Psi$$
$$\Rightarrow [B]_{H[\sigma]} = F \text{或} [C]_{H[\sigma]} = F$$
$$\Rightarrow [B \wedge C]_{H[\sigma]} = F.$$

Case. $\vee$. 同理

Case. $\to$. 同理

Case. $\leftrightarrow$. A为$B \leftrightarrow C$.

$$B \leftrightarrow C \in \Psi \Rightarrow B \in \Psi \text{ iff. } C \in \Psi$$
$$\Rightarrow [B]_{H[\sigma]} = T \text{ iff. } [C]_{H[\sigma]} = T$$
$$\Leftrightarrow [B \leftrightarrow C]_{H[\sigma]} = T$$

$$\neg(B \leftrightarrow C) \in \Psi \Rightarrow B \in \Psi \text{ iff. } \neg C \in \Psi$$
$$\Rightarrow [B]_{H[\sigma]} = T \text{ iff. } [C]_{H[\sigma]} = F$$
$$\Leftrightarrow [B \leftrightarrow C]_{H[\sigma]} = F$$

Case. $\forall$. A为$\forall x.B$.

$$\forall x.B \in \Psi \Rightarrow B[\tfrac{t}{x}] \in \Psi \text{ for all } t \in T$$
$$\Rightarrow [B[\tfrac{t}{x}]]_{H[\sigma]} = T \text{ for all } t \in T$$
$$\Rightarrow [B]_{H[\sigma[x:=t_{H[\sigma]}]]} = T \text{ for all } t \in T$$
$$\Rightarrow [B]_{H[\sigma[x:=[t]]]} = T \text{ for all } t \in T$$
$$\Rightarrow [B]_{H[\sigma[x:=u]]} = T \text{ for all } u \in H$$
$$\Rightarrow [\forall x.B]_{H[\sigma]} = T$$

$$\neg\forall x.B \in \Psi \Rightarrow \neg B[\tfrac{t}{x}] \in \Psi \text{ for some } t \in T$$

$$\Rightarrow [\neg B[\tfrac{t}{x}]]_{H[\sigma]} = T \text{ for some } t \in T$$

$$\Rightarrow [\neg B]_{H[\sigma[x:=[t]]]} = T \text{ for some } t \in T$$

$$\Rightarrow [B]_{H[\sigma[x:=[t]]]} = F \text{ for some } t \in T$$

$$\Rightarrow [B]_{H[\sigma[x:=u]]} = F \text{ for some } u \in H$$

$$\Rightarrow [\forall x.B]_{H[\sigma]} = F$$

Case. ∃. 同理可证. Q.E.D.

Part4.3- Henkin的完全性定理证明

消除模糊性

定义6.15(Henkin集). 设 Γ 为公式集， Γ 为 Henkin 集指

1) Γ 极大协调;

2) 若 $\exists x.A \in \Gamma$ 则有项 t 使 $A[\frac{t}{x}] \in \Gamma$ 。

Lindenbaum扩充

定义6.16. 设$\mathscr{L}$为一阶语言且$\|\mathscr{L}\| = \aleph_0$, 令$\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

定理6.17. 设 Φ 为公式集且$Con(\Phi)$, 则存在 $\mathscr{L}'$ 公式集 Ψ 使$\Psi \supseteq \Phi$ 且 Ψ 为 $\mathscr{L}'$ 的 Henkin 集。

证明: 设 $\mathscr{L}$ 的全体公式为 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \cdots (n \in \mathbb{N})$。令

$$\begin{cases} \Psi_0 = \Phi \\ \Psi_{n+1} = \begin{cases} \Psi_n & ,\text{若} Incon(\Psi_n \cup \{\varphi_n\}) \\ \Psi_n \cup \{\varphi_n\} & ,\text{若} Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\}) \text{且} \varphi_n \text{不呈形} \exists x.A \\ \Psi_n \cup \{\varphi_n, A[\frac{c}{x}]\} & ,\text{若} Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\}) \text{且} \varphi_n \text{呈形} \exists x.A \end{cases} \end{cases}$$

这里 c 为 $\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 中不曾使用过的新常元。

而令

$$\Psi = \cup\{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

定理6.17的证明过程

证明思路：

(1) $\Phi \subseteq \Psi$;

(2) 对所有的$n \in \mathbb{N}$，$Con(\Psi_n)$;

(3) $Con(\Psi)$；**Lindenbaum引理**

(4) 在 Ψ_n 中出现的新常元是有穷的；

(5) Ψ 极大协调；

(6) Ψ 为 Henkin 集。

证明过程：

(1) $\Phi \subseteq \Psi$ 易见;

(2) 对 n 归纳证明 $Con(\Psi_n)$ 如下：

奠基： $n = 0 \quad \because \Psi_0 = \Phi \quad \therefore Con(\Psi_0)$

归纳假设：设 $Con(\Psi_n)$

归纳步骤：欲证 $Con(\Psi_{n+1})$

情况1. $Incon(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$, 从而 $\Psi_{n+1} = \Psi_n$,
故由 I.H.知 $Con(\Psi_{n+1})$；

情况2. $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$且$\varphi_n$ 不呈形 $\exists x.A$, 从而 $Con(\Psi_{n+1})$;

情况3. $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$ 且 φ_n 呈形 $\exists x.A$,

这时可设 $\varphi_n \equiv \exists x.A$, $\Psi_{n+1} = \Psi_n \cup \{\varphi_n, A[\frac{c}{x}]\}$,

反设$Incon(\Psi_{n+1})$,从而存在有穷集 $\Delta' \subseteq \Psi_{n+1}$ 使$\Delta' \vdash$可证，

从而存在有穷集 $\Delta \subseteq \Psi_n$ 使 $\Delta, \exists x.A, A[\frac{c}{x}] \vdash$ 可证，

使其证明树为 T，在 T 中将 c 替换成新变元 y,

从而 $\Delta, \exists x.A, A[\frac{y}{x}] \vdash$ 可证。因此由 $\exists L$ 知 $\Delta, \exists x.A \vdash$ 可证，

与 $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$ 矛盾。

(3) 欲证 $Con(\Psi)$ 反设 $Incon(\Psi)$,

从而存在 Ψ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \vdash$ 可证。

$\because \Delta$ 有穷，不妨设 $\Delta = \{A_1, \cdots, A_k\}$

$\therefore A_i(i = 1, 2, \cdots, k) \in \Psi = \cup\{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

故对每个 $i \le k$, 有 n_i 使 $A_i \in \Psi_{n_i}$,

因此有 l 使对每个 $i \le k$, $A_i \in \Psi_l$, 从而 $\Delta \subseteq \Psi_l$,

然而 $Con(\Psi_l)$, 与 $\Delta \vdash$ 可证矛盾。

(4) 对 n 归纳证明即可。

(5) 欲证Ψ 极大协调，由于已证 Ψ 协调，现只需证极大性。

由前命题知，只需证若 $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$，则 $\varphi_n \in \Psi$.

设 $Con(\Psi \cup \{\varphi_n\})$, 从而 $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$,

从而 $\varphi_n \in \Psi_{n+1}$, 因此， $\varphi_n \in \Psi$;

(6) Ψ 为Henkin集，对于公式 $\exists x.A \in \Gamma$, 设 $\exists x.A$ 为 φ_n,

$\because \varphi_n \in \Psi \therefore Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$,

故 $A[\frac{c}{x}] \in \Psi_{n+1}$, 从而 $A[\frac{c}{x}] \in \Psi$。

$\square$

Henkin集和Hentikka集

定理6.18. 若 Γ 为Henkin集，则 Γ 为Hintikka集。

证明: 设 Γ 为Henkin集,对照Hintikka集的定义逐条验证如下：

(1) 这里因为$Con(\Gamma)$;

(2) 设 $\neg\neg A \in \Gamma$, $\because$ $\neg\neg A \vdash A$ 可证, $\therefore$ $\Gamma \vdash A$ 可证，
又 $\because$ Γ 极大协调，$\therefore$ $A \in \Gamma$;

(3) 设$A \to B \in \Gamma$, 反设$\neg A \notin \Gamma$且$B \notin \Gamma$, 由命题6.6,$A \in \Gamma$且$\neg B \in \Gamma$,
$\because$ $A, A \to B \vdash B$ 可证，$\therefore$ $B \in \Gamma$ 矛盾;

(4) 设 $\neg(A \to B) \in \Gamma$, $\because$ $\neg(A \to B) \vdash A, \neg(A \to B) \vdash \neg B$ 可证，
$\therefore$ $A \in \Gamma$ 且 $\neg B \in \Gamma$ (由命题6.7);

(5) 设 $A \wedge B \in \Gamma$, $\because$ $A \wedge B \vdash A, A \wedge B \vdash B$ 可证，$\therefore A, B \in \Gamma$;

(6) $\neg(A \wedge B) \in \Gamma$, 反设 $\neg A \notin \Gamma$且$\neg B \notin \Gamma$，从而由命题6.6知

$A \in \Gamma$ 且 $B \in \Gamma$，$\because A, B \vdash A \wedge B$ 可证，

$\therefore A \wedge B \in \Gamma$ 与$\neg(A \wedge B) \in \Gamma$ 矛盾;

(7)~(8) 同理可证;

(9) 设 $\forall x.A \in \Gamma$, $\because \forall x.A \vdash A[\frac{t}{x}]$ 可证, $\therefore A[\frac{t}{x}] \in \Gamma$;

(10) 设 $\neg\forall x.A \in \Gamma$, $\because \neg\forall x.A \vdash \exists x.\neg A$ 可证, $\therefore \exists x.\neg A \in \Gamma$,

又 $\because \Gamma$ 为Henkin集, $\therefore$ 有 t 使 $\neg A[\frac{t}{x}] \in \Gamma$;

(11)~(12) 同理可证;

(13)~(17)由命题 6.7 即得。

□

模型存在定理

定理6.19. 若 Γ 协调，则 Γ 可满足。

证明: Γ 协调

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \text{存在Henkin集 } \Psi \supseteq \Gamma \\
&\Rightarrow \quad \text{存在 } \Psi \text{ 使 } \Psi \supseteq \Gamma \text{ 且 } \Psi \text{ 为Hintikka集} \\
&\Rightarrow \quad \text{存在 } \Psi \text{ 使 } \Psi \supseteq \Gamma \text{ 且 } \Psi \text{ 可满足} \\
&\Rightarrow \quad \Gamma \text{ 可满足.}
\end{aligned}$$

$\square$

完全性定理证明

定理6.20 (Completeness). $\Gamma \vdash A \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vDash A$

证明: "$\Rightarrow$"为Soundness;

"$\Leftarrow$" 设 $\Gamma \vDash A$

情况1. $Incon(\Gamma)$, 易见 $\Gamma \vdash A$ 可证;

情况2. $Con(\Gamma)$,反设 $\Gamma \vdash A$ 不可证，从而 $Con(\Gamma \cup \{\neg A\})$,
故有 $\mathbb{M}$ 和 σ 使 $\mathbb{M} \vDash_\sigma \Gamma \cup \{\neg A\}$ 与 $\mathbb{M} \vDash_\sigma A$ 矛盾。

$\square$

紧性定理

定理6.21 (Compactness). 设 Γ 为公式集，若对任何 Γ 的有穷子集 Δ，有 Δ 可满足，则 Γ 可满足。

证明: 反设 Γ 不可满足，则 $Incon(\Gamma)$,

从而存在 Γ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \vdash A \wedge \neg A$,

从而 Δ 不可满足，矛盾。 $\square$