南京大学
Nanjing University

第七讲 G系统

内容提要

- G系统的公理和规则
  - 公理|规则
- 证明树
  - 证明树|可证
  - 有效的序贯
- 一些导出规则
  - 反证法规则 | 分情况规则 | 逆否推演 | 矛盾规则 |
  - MP规则 | 三段论

Part1 - G系统的公理和规则

G系统的公理和规则

定义4.1　Γ, Δ 为公式的有穷集合。 $\Gamma \vdash \Delta$ 称为 *sequent*。Γ 为其前件， Δ 为其后件。***G*** 由以下公理和规则组成：

公理 :　$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$

规则 :　$\neg L : \dfrac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \vdash \Lambda}$　　$\neg R : \dfrac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$

$$\vee L : \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \vee R : \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \vee B, \Theta}$$

$$\wedge L : \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \wedge R : \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, \Theta \qquad \Gamma \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \wedge B, \Theta}$$

$$\to L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Lambda \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \to B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \to R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \to B, \Theta}$$

$$\forall L: \frac{\Gamma, A[t/x], \forall x A(x), \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \forall x A(x), \Delta \vdash \Lambda} \qquad \forall R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A[y/x], \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \forall x A(x), \Theta}$$

$$\exists L: \frac{\Gamma, A[y/x], \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \exists x A(x), \Delta \vdash \Lambda} \qquad \exists R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A[t/x], \exists x A(x), \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \exists x A(x), \Theta}$$

$$Cut: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A \qquad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$$

在 $\forall R$ 规则和 $\exists L$ 规则中，变元 y 是一个新变元

G系统的规则

- **序贯演算算法**
  - 输入：**结论/下部**，一个复杂的推理状态 (序贯)
  - 序贯演算：处理该推理状态中**最外层的一个逻辑连接词或量词**
  - 输出：**前提/上部**，一个稍微化简的推理状态 (新的序贯)

- **语法指导**
  - 不需要像永真推理系统一样依赖“灵感”去“演绎公理”
  - 当前的状态 (序贯)本身决定了下一步必须使用什么规则

两类规则

- 线性转换
  - 不增加演算分支，只是重新组织当前的序贯

$$\neg L : \quad \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \neg R : \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$$

- 分支裂变
  - 增加演算分支，必须同时完成两个分支的演算，原序贯的演算才算完成

$$\to L : \quad \frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Lambda \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \to B, \Delta \vdash \Lambda}$$

变量选择 ∀R和∃L规则

- **∀R规则**：试图证明“所有”
  - 目标：证明全班同学都及格了
  - **错误做法**：查看班长是否及格
  - **正确做法**：让本科生院随机指定一个同学，查看其是否及格

- **∃L规则**：试图使用“存在”
  - 前提：有人考试作弊了
  - **错误做法**：随便找一个同学，把他当作作弊者
  - **正确做法**：给作弊的人起一个全新的代号，用代号指代作弊者

G系统的局限性

- 对于命题逻辑而言，**G系统是完美的语法制导推理系统**
- 对于一阶语言或者谓词逻辑而言，**G系统的推理过程是“不可知的”(Non-deterministic)**

$$\frac{\Gamma \vdash \Lambda, A[t/x], \exists x A(x), \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \exists x A(x), \Theta}$$

  - 如何确定此处带入的项`t`
  - 基于**Herbrand定理**，`t`的论域可以对应于一个无限集合

- G系统适合人类，但不适合计算机进行自动推理
  - 我们是怎么能猜到合适的`t`

基于约束求解的自动定理证明

- 如果我想证明$\Gamma \vdash A$，则只需证明$\Gamma \vdash \neg A$有反例即可

- 已知所有自然数的后继都大于0，求证存在一个大于0的自然数
    - 后继：函数s(x)，大于0：谓词P(x)
    - 一阶语言表示：$\forall x\ P(s(x)) \vdash \exists y\ P(y)$
    - G系统的思路：使用∃R规则，寻找项t带入y
    - ATP的思路：P(s(x))和¬P(y)，是否存在反例？

s(x)=y是否有解！

带等词公理的Ge系统

我们给出带等词的一阶谓词演算Ge（有些教科书中记为$G_{=}$）

Ge 由 G 加上3个等词公理组成：

1) 若 $\vdash s \doteq s$, 这里s为任何项;

2) 若 $s_1 \doteq t_1, \cdots, s_n \doteq t_n \vdash f(s_1, \cdots, s_n) \doteq f(t_1, \cdots, t_n)$,
这里 f 为任何 n 元函数（$n = 1, 2, \cdots$），
对于$i \leq n$，s_i 和 t_i 为任何项;

3) $s_1 \doteq t_1, \cdots, s_n \doteq t_n, \quad p(s_1, \cdots, s_n) \vdash p(t_1, \cdots, t_n)$,
这里 p 为任何 n 元谓词（含等词）（$n = 1, 2, \cdots$），
对于$i \leq n$，s_i 和 t_i 为任何项。

一些约定

1) $\vec{t}$ 表示 $(t_1\cdots t_n)$， $\vec{s}$ 表示 $(s_1\cdots s_n)$，即采用矢量记法;

2) $f(\vec{t})$ 表示 $f(t_1\cdots t_n)$，当 f 为 n 元函数；

3) $p(\vec{t})$ 表示 $p(t_1\cdots t_n)$，当 p 为 n 元谓词；

4) $(\vec{s}\doteq\vec{t})$ 表示 $(\cdots((s_1\doteq t_1)\wedge(s_2\doteq t_2))\wedge\cdots\wedge(s_n\doteq t_n)\cdots)$。

Part2- 证明树

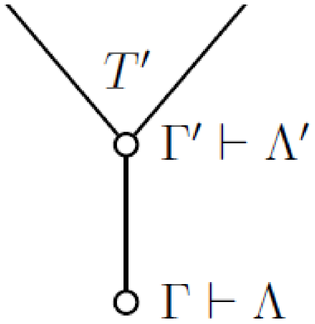
证明树

定义4.3　设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为sequent，树 T 为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树指

(1) 当 $\Gamma \vdash \Lambda$为 $\boldsymbol{G}$ 公理，以 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为结点的单点树 T 为其证明树。

(2) 当 $\dfrac{\Gamma' \vdash \Lambda'}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为 $\boldsymbol{G}$ 规则。若 T' 为 $\Gamma' \vdash \Lambda'$ 的证明树，

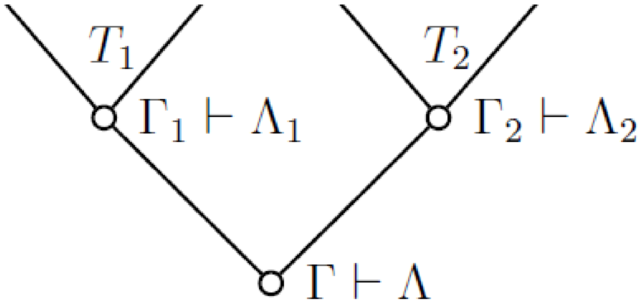
则树 T:



为的 $\Gamma \vdash \Lambda$ 证明树。

(3) 当 $\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \Lambda_2}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为 $\boldsymbol{G}$ 规则。

若树 T_i 为 $\Gamma_i \vdash \Lambda_i$ 的证明树$(i = 1, 2)$，则树 T:



为的 $\Gamma \vdash \Lambda$ 证明树。

构建证明树

- 证明树构建，本质上是**一个“自底向上”的搜索过程**：
  - **初始条件**：从需要证明的定理（树根）出发
  - **搜索步骤**：观察当前序贯最外层的连接词/量词，匹配对应规则，生成上一层的序贯
  - **终止条件**：所有顶层序贯都是自反公理，则搜索终止

- 上述构建过程是否可以进行“剪枝”？

可证

定义4.4 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为 *sequent*， $\Gamma \vdash \Lambda$ 可证（*provable*）指存在 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

例4.1 证明下列sequent可证：

(1) $\vdash \alpha \to \alpha$

(2) $\vdash \alpha \vee \alpha$

(3) $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

G系统的基本定理 Hauptsatz

- 若$\Gamma \vdash \Delta$在G系统中可证，则$\Gamma \vdash \Delta$在G系统中存在一个不使用Cut规则的证明。
- 证明过程详见《数理逻辑十二讲》第10讲

例4.2　证明下列sequent可证。

(1) $\vdash \forall x A(x) \to A(t)$

(2) $\vdash A(t) \to \exists x A(x)$

(3) $\vdash (\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge P(t)) \to Q(t)$

这里$A(t)$为$A[\frac{t}{x}]$的简写.

证. (1)

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Axiom}}{A(t), \forall x A(x) \vdash A(t)}}{\forall x A(x) \vdash A(t)}\ \forall L}{\vdash \forall x A(x) \to A(t)}\ \to R$$

(2)

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Axiom}}{A(t) \vdash A(t), \exists x A(x)}}{A(t) \vdash \exists x A(x)}\ \exists R}{\vdash A(t) \to \exists x A(x)}\ \to R$$

(3)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Axiom}}{P(t), \forall x(P(x)\to Q(x)) \vdash P(t), Q(t)} \quad \overset{\text{Axiom}}{Q(t), P(t), \forall x(P(x)\to Q(x)) \vdash Q(t)}}{P(t) \to Q(t), P(t), \forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash Q(t)}\ \to L}{\forall x(P(x) \to Q(x)), P(t) \vdash Q(t)}\ \forall L}{\forall x(P(x) \to Q(x)) \land P(t) \vdash Q(t)}\ \land L}{\vdash (\forall x(P(x) \to Q(x)) \land P(t)) \to Q(t)}\ \to R$$

$\square$

例4.3 证明 $\forall R(x) \wedge \exists y Q(y) \vdash P(f(v)) \wedge \exists z Q(z)$ 可证。

证. y_1 为新变元。

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Axiom}}{P(f(v)), \forall x P(x), \exists y Q(y) \vdash P(f(v))}}{\forall x P(x), \exists y Q(y) \vdash P(f(v))}\forall L \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{Axiom}}{\forall x P(x), Q(y_1) \vdash Q(y_1), \exists z Q(z)}}{\forall x P(x), Q(y_1) \vdash \exists z Q(z)}\exists R}{\forall x P(x), \exists y Q(y) \vdash \exists z Q(z)}\exists L}{\dfrac{\forall x P(x), \exists y Q(y) \vdash P(f(v)) \wedge \exists z Q(z)}{\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y) \vdash P(f(v)) \wedge \exists z Q(z)}\wedge L}\wedge R$$

□

例4.4 证明 $\Gamma_1 \vdash A, A \vdash \Gamma_3$ 可证，则 $\Gamma_1 \vdash \Gamma_3$ 可证。

证. 用 Cut 规则即可。

□

命题4.5 $A_1,\ldots,A_m \vdash B_1,\ldots,B_n$ 可证 $\Longleftrightarrow$ $\bigwedge\limits_{i=1}^{m} A_i \vdash \bigvee\limits_{i=1}^{n} B_i$ 可证。

证. ”$\Longrightarrow$” 设 $A_1,\ldots,A_m \vdash B_1,\ldots,B_n$ 可证

$\because$

$$\begin{array}{cl}
A_1,\ldots,A_m \vdash B_1,\ldots,B_n & \\
\hline\hline
\bigwedge\limits_{i=1}^{m} A_i \vdash B_1,\ldots,B_n & \wedge L \\
\hline\hline
\bigwedge\limits_{i=1}^{m} A_i \vdash \bigvee\limits_{i=1}^{n} B_i & \vee R
\end{array}$$

$\therefore$ O.K.

"$\Longleftarrow$" 设 $\bigwedge_{i=1}^{m} A_i \vdash \bigvee_{i=1}^{m} B_i$ 可证

$\because$ ① $A_1, \ldots, A_n \vdash \bigwedge_{i=1}^{m} A_i$ 可证

② $\because$
$$\frac{\{B_i \vdash B_1, \ldots, B_m \mid i = 1, 2, \ldots, m\}}{\bigvee_{i=1}^{m} B_i \vdash B_1, \ldots, B_n} \vee L$$

$\therefore \bigvee_{i=1}^{m} B_i \vdash B_1, \ldots, B_n$ 可证

③ $\bigwedge_{i=1}^{m} A_i \vdash \bigvee_{i=1}^{m} B_i$ 可证

$\therefore$ O.K. □

Part3- 一些导出规则

一些导出规则

①反证法规则: $\dfrac{\neg A, \Gamma \vdash B \qquad \neg A, \Gamma \vdash \neg B}{\Gamma \vdash A}$

证. 证明树如下：

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg A, \Gamma \vdash B$}
\doubleLine
\RightLabel{$\neg L, \neg R$}
\UnaryInfC{$\neg A, \Gamma \vdash \neg\neg B$}
\AxiomC{$\neg A, \Gamma \vdash \neg B$}
\RightLabel{$\neg L$}
\UnaryInfC{$\neg A, \Gamma, \neg\neg B \vdash$}
\RightLabel{Cut}
\BinaryInfC{$\neg A, \Gamma \vdash$}
\RightLabel{$\neg R$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg\neg A$}
\AxiomC{Axiom}
\noLine
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{$\neg R$}
\UnaryInfC{$\vdash A, \neg A$}
\RightLabel{$\neg L$}
\UnaryInfC{$\neg\neg A \vdash A$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash A$}
\end{prooftree}
$$

□

②分情况规则: $\dfrac{A, \Gamma \vdash B \qquad \neg A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B}$

证. 证明树如下：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B, \neg\neg A}\neg R \qquad \neg\neg A, \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B, A}\text{Cut} \qquad A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B}\text{Cut}$$

□

③逆否推演: $\dfrac{A, \Gamma \vdash B}{\neg B, \Gamma \vdash \neg A}$, $\dfrac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash \neg B \to \neg A}$

证. 证明树如下:

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \qquad A \to B \vdash \neg B \to \neg A}{\Gamma \vdash \neg B \to \neg A}\,\mathrm{Cut}$$

这里:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, A \to B \vdash B}{\neg B, A, A \to B \vdash}}{\neg B, A \to B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}$$

□

④矛盾规则: $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$

证. 证明树如下：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A, B}}{\neg A, \Gamma \vdash B} \qquad \cfrac{\Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \neg A, B}}{\Gamma \vdash B}\,\mathrm{Cut}$$

□

⑤MP: $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$

证.

Lemma 1. $\because \dfrac{A \vdash A, B \qquad A, B \vdash B}{A, A \to B \vdash B}$

$\therefore A, A \to B \vdash B$ 可证。

Lemma 2.

$$\cfrac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \cfrac{\Gamma \vdash A \qquad A, A \to B \vdash B}{\Gamma, A \to B \vdash B}\,\text{Cut,Lemma 1}}{\Gamma \vdash B}\,\text{Cut}$$

$\square$

⑥三段论: $\dfrac{\Gamma \vdash A(t) \qquad \Gamma \vdash \forall x(A(x) \to B(x))}{\Gamma \vdash B(t)}$

证. 证明树如下:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \forall x(A(x) \to B(x)) \qquad \dfrac{A(t) \to B(t), \forall x(A(x) \to B(x)) \vdash A(t) \to B(t)}{\forall x(A(x) \to B(x)) \vdash A(t) \to B(t)}}{\Gamma \vdash A(t) \to B(t)}\text{Cut} \qquad \Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash B(t)}$$

□

这些导出规则在以后的证明中皆可被运用。