南京大学 Nanjing University

第六讲--一阶语言

内容提要

- 一阶逻辑的语法
  - 子目标
  - 项
  - 公式
  - 自由变元
  - 替换与换名
- 一阶逻辑的语义
  - 结构|模型
  - 项的解释| 公式的解释
  - 满足| 语义结论
  - 替换引理

Part1－ 一阶逻辑语法

字母表 Alphabet

定义3.1 一阶语言的字母表 (*alphabet*) 由以下两个集合组成：

(1) 逻辑符集合:

变元集V： 可数无穷集$V=\{x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$

联结词： $\neg$ $\vee$ $\wedge$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$

量词： $\forall$ $\exists$ 等词： $\doteq$

辅助符：) ( ] [,

(2) 非逻辑符集合 $\mathscr{L}$ 其由以下组成:

(i) $\mathscr{L}_c$ 由可数（包括 0 个）常元符组成，$\mathscr{L}_c=\{c_0,c_1,\ldots\}$

(ii) $\mathscr{L}_f$（函数集）由可数（包括 0 个）函数符组成，$\mathscr{L}_f=\{f_0,f_1,\ldots\}$

(iii) $\mathscr{L}_P$（谓词集）由可数（包括 0 个）谓词符组成，$\mathscr{L}_P=\{P_0,P_1,\ldots\}$

对每个函数符 f,每个谓词符 P 赋予正整数 $\mu(f)$, $\mu(P)$ 为 f ,P 的 *arity*(元数).

两个例子

例3.1. 初等算术语言 $\mathscr{A}$

常元符集为 $\{\ 0\ \}$.

函数符集为 $\{\ S, +, \cdot\ \}$.

谓词符集为 $\{\ <\ \}$.

例3.2. 群论语言 $\mathfrak{G}$

常元符集为 $\{\ e\ \}$.

函数符集为 $\{\ \cdot$ （二元）, $^{-1}$ （一元） $\}$.

项 Term

定义3.2（项的定义）

(a) **归纳定义法**

(1) 每个变元符为项.

(2) 每个常元符为项.

(3) 若 f 为 n 元函数符，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 为项，则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 为项.

(4) 项仅限于此.

(b) **闭包定义法**

全体项的集合T为满足以下条件的最小集合:

(1) $V \subseteq T$.

(2) $\mathscr{L}_c \subseteq T$

(3) 若 f 为 n 元函数，$t_1, \ldots, t_n \in T$，则 $f(t_1, \ldots, t_n) \in T$.

(c) In ***BNF***,

$$t ::= x | c | f(t_1, \ldots, t_n)$$

公式 Formula

定义3.3（公式的定义）

(a) **归纳定义法**

(1) 若 s 和 t 为项，则 $s \doteq t$ 为公式;

(2) 若 R 为 n 元谓词符，并且 $t_1, \ldots, t_n$ 为项，则 $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 为公式;

(3) 若 A 为公式，则 $\neg A$ 为公式.

(4) 若 A，B 为公式，则 $(A * B)$ 为公式.
这里 $* \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$;

(5) 若 A，B 为公式且 x 为变元，则
$\forall x.A$ 和 $\exists x.B$ 为公式.

(6) 公式仅限于此.

仅由（1）和（2）所得到的公式被称为原子公式（atomic formula）.

例3.3 群论语言$\mathfrak{G}$的项和公式

$\mathfrak{G} = \{\ e, \cdot, ^{-1}\ \}$. 例如，$x \cdot e$, $x \cdot x \cdot e$, $(x^{-1})^{-1} \cdot e$ 为项.

群论公理可表达为(informally)：

结合律 $\forall x \forall y \forall z.(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$

幺公理 $\forall x.(x \cdot e = e \cdot x = x)$

逆公理 $\forall x.(x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e)$

formally

$\mathfrak{G} \triangleq \{\ e$（常元）$, m$（二元函数）$, i$（一元函数）$\ \}$

(1) 结合律.

$$\forall x.(\forall y.(\forall z.(m(x, m(y, z)) \doteq m(m(x, y), z))))$$

(2) 幺公理.

$$\forall x.(m(x, e) \doteq x \wedge m(e, x) \doteq x)$$

(3) 逆公理.

$$\forall x.(m(x, i(x)) \doteq e \wedge m(i(x), x) \doteq e)$$

哪些是合法公式

- P(x, f(a))
- (P(x) /\ Q(y))
- ∀x((P(x) -> ∃y(Q(x, y))))
- f(x, y)
- (P(x) /\ f(a))
- ∀ a P(a)

项的自由变元

定义3.4 (项的自由变元).

设t为项，对t结构归纳定义$FV(t)$如下：

(1) $FV(x) = x$，这里 $x \in V$

(2) $FV(c) = \emptyset$，这里 $c \in \mathscr{L}_c$

(3) $FV(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$，这里 f 为 n 元函数.

x 为 t 的自由变元指 $x \in FV(t)$.

t 为 closed term 指 $FV(t) = \emptyset$.

公式的自由变元

定义3.5 (公式的自由变元).

设 A 为公式，对 A 的结构归纳定义 $FV(A)$ 如下：

(1) $FV(t_1 \doteq t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$.

(2) $FV(P(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$.

(3) $FV(\neg A) = FV(A)$.

(4) $FV(A * B) = FV(A) \cup FV(B)$，这里$* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

(5) $FV(QxA) = FV(A) - \{x\}$，这里$Q \in \{\forall, \exists\}$.

x 为 A 的自由变元指 $x \in FV(A)$；

A 为 sentence 指 $FV(A) = \emptyset$.

公式的自由变元

例3.4 设公式 A 为

$$\exists x((P(x, y)\wedge\forall y R(x, y))\rightarrow Q(x,z))$$

第一个出现 自由　第二个出现 约束　第三个出现 约束

注：

(1) 定义在 A 中 x 的第 i 个出现（occur）是约束的（bounded）指存在 A 的子公式 $Qx.B$ 使 A 中 x 的第 i 个出现在 $Qx.B$ 中.
在 A 中 x 的第 i 个出现是自由的指它不是约束的.

(2) 一个变元既有自由出现又有约束出现.

替换与换名

- 替换 **substitution**：将公式中的自由变元**x**整体代换为项**t**
  - 实际改变了公式的内容！
  - 通用的指代(自由变元)->具体的内容(项)
  - 函数调用时，将实参（具体数值）传递给形参（占位符）的过程
- 换名 **renaming**：将公式中的约束变元及其对应的量词，同时更改为另一个不冲突的新名字。
  - 不改变公式的内容！ $\forall xP(x)$，$\forall yP(y)$完全等价
  - 把一个局部变量名从**i**改成 **index**，程序的逻辑完全没变

项的替换

定义3.6 (项的替换).

设 s 和 t 为项，x 为变元，对 s 的结构作归纳定义 $s\left[\frac{t}{x}\right]$ 如下：

(1) $x\left[\frac{t}{x}\right]=t$

(2) $y\left[\frac{t}{x}\right]=y$，这里 y 为异于 x 的变元.

(3) $c\left[\frac{t}{x}\right]=c$，这里 c 为常元.

(4) $f(t_1,\ldots,t_n)\left[\frac{t}{x}\right]=f\left(t_1\left[\frac{t}{x}\right],\ldots,t_n\left[\frac{t}{x}\right]\right)$

公式的替换

定义3.7 (公式的替换).

设 A 为公式, t 为项, x 为变元, 对 A 的结构作归纳定义 $A\left[\frac{t}{x}\right]$ 如下:

(1) $(t_1 \doteq t_2)\left[\frac{t}{x}\right] = (t_1[\frac{t}{x}] \doteq t_2[\frac{t}{x}])$

(2) $R(t_1, \ldots, t_n)\left[\frac{t}{x}\right] = R\left(t_1\left[\frac{t}{x}\right], \ldots, t_n\left[\frac{t}{x}\right]\right)$.

(3) $(\neg A)\left[\frac{t}{x}\right] = \neg\left(A\left[\frac{t}{x}\right]\right)$.

(4) $(A * B)\left[\frac{t}{x}\right] = \left(A\left[\frac{t}{x}\right]\right) * \left(B\left[\frac{t}{x}\right]\right)$
这里 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(5) $(Qx.A)\left[\frac{t}{x}\right] = Qx.A$
这里 $Q \in \{\forall, \exists\}$

(6) $(Qy.A)\left[\frac{t}{x}\right] = Qy.\left(A\left[\frac{t}{x}\right]\right)$
if y 为异于 x 的变元且 $y \notin FV(t)$. 这里 $Q \in \{\forall, \exists\}$

(7) $(Qy.A)\left[\frac{t}{x}\right] = Qz.\left(A\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{t}{x}\right]\right)$
if y 为异于 x 的变元 $y \in FV(t)$.
这里 $Q \in \{\forall, \exists\}$, z 为满足 $z \notin FV(t)$ 且 z 不出现于 A 中的足标最小的变元.

Part2- 一阶逻辑语义

解释与赋值

- **解释 Interpretation**：建立映射
  - 为目标公式建立背景设定，赋予抽象符号实际意义
  - 设定论域，映射常量，映射函数，映射谓词
  - 处理全局不变的符号
- **赋值 Assignment**：处理变量
  - 为变量指定论语中某个具体的个体
  - 处理可以随上下文发生变化的符号

- 命题逻辑：符号缺乏层次架构，所以**赋值等价于解释**
- 一阶语言：符号存在层次架构，所以**赋值包含于解释**

结构 Structure

定义3.8 （结构（Structure））

设 $\mathscr{L}$ 为一阶语言，$\mathscr{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称之为论域 (domain).

(2) I 为定义域为 $\mathscr{L}$ 的 mapping，其满足:

(2.1) 对任何 $\mathscr{L}$ 的常元 c，$I(c) \in M$;

(2.2) 对任何 $\mathscr{L}$ 的 n 元 $(n > 0)$ 函数 f，$I(f) : M^n \to M$;

(2.3) 对任何 $\mathscr{L}$ 的 0 元谓词 P，$I(P) \in Bool = \{T, F\}$;

(2.4) 对任何 $\mathscr{L}$ 的 n 元 $(n > 0)$ 谓词 P，$I(P) \subseteq M^n$;

人们习惯上用论域 M 代表结构 $\mathbb{M}$，即对 M 和 $\mathbb{M}$ 不加以区分.

约定：we write c_M for I(c), f_M for $I(f)$, and P_M for $I(P)$.

$\mathscr{L}$ 的结构对 $\mathscr{L}$ 的元素给出解释。

例子- $\mathscr{A}$ 的结构

例3.5 对于$\mathscr{A}$，令$\mathbb{N} = (N, I)$,

$$
\begin{aligned}
N &= \{0, 1, 2, \ldots\},\\
I(0) &= 0,\\
I(S) &= s,\\
I(+) &= +,\\
I(\cdot) &= *,\\
I(<) &= <.
\end{aligned}
$$

$s(n) = n+1$

称 (N, I) 为初等算术的 standard model.

赋值与模型

定义 3.9. 设$V = \{x_0, x_1, ..., x_n, ...|n \in |\mathbb{N}\}$ 为一阶语言$\mathscr{L}$的变元集，$\mathbb{M}$为一个$\mathscr{L}$–结构.

(1) 一个 M 上的赋值 σ 为从 $\mathcal{V}$ 到 M 的映射，即 $\sigma : \mathcal{V} \to M$;

(2) $\mathscr{L}$ 的一个模型为二元组 (M, σ), 这里 M 为 $\mathscr{L}$- 结构且 σ 为 M 上的赋值.

实质上为 $(\mathbb{M}, \sigma)$

例3.6 （$\mathscr{A}$之模型）

令$\mathbb{N} = (N, I)$,

$N = \{0, 1, 2, ...\}$,

$I(0) = 0$,

$I(S) = s$,

$I(+) = +$,

$I(\cdot) = *$,

$I(<) =<$.

令 $\sigma(x_n) = n$,

$(\mathbb{N}, \sigma)$ 为 $\mathscr{A}$ 之模型.

有时也可记为(N, σ)

记号: $\sigma[x_i := a]$

$$(\sigma[x_i := a])(x_j) = \begin{cases} \sigma(x_j) & \text{if } i \neq j \\ a & \text{if } i = j \end{cases}$$

项的解释

定义3.10 （项的解释）.设(M,σ)为一个$\mathscr{L}$–模型，t为项，项t 的解释$t_{M[\sigma]}$被归纳地定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathscr{L}$；

(3) $\big(f(t_1, ..., t_n)\big)_{M[\sigma]} = f_M\Big((t_1)_{M[\sigma]}, ..., (t_1)_{M[\sigma]}\Big)$

引理3.11 $t_{M[\sigma]} \in M$

例3.7 对上面模型(N,σ)，求$(+(x_1, S(x_7)))_{N[\sigma]}$.

解: $(+(x_1, S(x_7)))_{N[\sigma]}$

$= (x_1)_{N[\sigma]} + (S(x_7))_{N[\sigma]}$

$= \sigma(x_1) + suc(\sigma(x_7))$

$= 1 + suc(7) = 1 + (7 + 1) = 9$ $\square$

命题的解释

上面把命题 P 解释为 $Bool = \{\ T, F\ \}$ 中的元素，这里我们承认

Classical Logic 中的排中律 (Law of excluded middle).

论域M中的每个命题要么为真，要么为假，别无它选。

联结词的解释

我们把 connectives 解释为 Bool 上函数.

① 对$\neg$的解释$B_\neg : Bool \to Bool$

$\mathbf{X}$	T	F
$B_\neg(\mathbf{X})$	F	T

② 对$\wedge$的解释$B_\wedge$:

$\mathbf{X}$	$\mathbf{Y}$	$B_\wedge(\mathbf{X},\mathbf{Y})$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

③ 对$\vee$的解释$B_\vee$:

$\mathbf{X}$	$\mathbf{Y}$	$B_\vee(\mathbf{X},\mathbf{Y})$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

④ 对$\to$的解释$B_\to$:

$\mathbf{X}$	$\mathbf{Y}$	$B_\to(\mathbf{X},\mathbf{Y})$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

⑤ 对$\leftrightarrow$的解释$B_\leftrightarrow$:

$\mathbf{X}$	$\mathbf{Y}$	$B_\leftrightarrow(\mathbf{X},\mathbf{Y})$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

公式的解释

定义3.12 (公式的解释) 设 (M,σ) 为一个 $\mathscr{L}$-模型，A 为公式，公式 A 的解释 $A_{M[\sigma]}$ 被归纳地定义如下：

(1) $(P(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, 若\langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]}\rangle \in P_M; \\ F, 若\langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]}\rangle \notin P_M. \end{cases}$

(2) $(t_1 \doteq t_2)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, 若 (t_1)_{M[\sigma]} = (t_2)_{M[\sigma]} \\ F, 否则. \end{cases}$

(3) $(\neg A)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_\neg(A_{M[\sigma]})$.

(4) $(A * B)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_*(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]})$，这里 $* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$.

(5) $(\forall x.A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, 若对所有 a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, 否则. \end{cases}$

(6) $(\exists x.A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, 若对某个 a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, 否则. \end{cases}$

引理3.13 对任何公式 A, $A_{M[\sigma]} \in \{T, F\}$.

一个等价的语义定义

设 (M,σ) 为一个 $\mathscr{L}$-模型，A 为公式，$M \vDash_\sigma A$ 定义如下：

- $M \vDash_\sigma t_1 \doteq t_2 \quad \text{iff} \quad (t_1)_{M[\sigma]} = (t_2)_{M[\sigma]}$;
- $M \vDash_\sigma P(t_1, \ldots, t_n) \quad \text{iff} \quad \langle (t_1)_{M[\sigma]}, \ldots, (t_n)_{M[\sigma]} \rangle \in P_M$;
- $M \vDash_\sigma \neg A \quad \text{iff} \quad not\ M \vDash_\sigma A$;
- $M \vDash_\sigma A * B \quad \text{iff} \quad M \vDash_\sigma A\ [*]\ M \vDash_\sigma B$，这里 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
- $M \vDash_\sigma \forall x.A \quad \text{iff}$ 对所有 $a \in M$，$M \vDash_{\sigma[x:=a]} A$;
- $M \vDash_\sigma \exists x.A \quad \text{iff}$ 对某个 $a \in M$，$M \vDash_{\sigma[x:=a]} A$.

可满足 Satisfiable

定义3.14 设$\mathscr{L}$为一阶语言，A为$\mathscr{L}$–公式，Γ为$\mathscr{L}$–公式集，(M,σ)为$\mathscr{L}$–模型.

(1) A 对于 (M,σ) 可满足(satisfiable)，记为 $M \models_\sigma A$，指 $A_{M[\sigma]} = T$.

(2) A 可满足指存在 (M,σ) 使 $M \models_\sigma A$.

(3) $M \models A$ 指 $M \models_\sigma A$ for all σ on M.

(4) Γ 对于 (M,σ) 可满足，记为 $M \models_\sigma \Gamma$ 指 $M \models_\sigma A$ for all $A \in \Gamma$.

(5) Γ 可满足指存在 (M,σ) 使 $M \models_\sigma \Gamma$.

(6) $M \models \Gamma$ 指 $M \models_\sigma \Gamma$ for all σ on M.

(7) A 永真 (valid), 记为 $\models A$,
指对任何模型 (M, σ) 有 $M \models_\sigma A$.

(8) Γ 永真, 记为 $\models \Gamma$,
指对任何模型 (M, σ) 有 $M \models_\sigma \Gamma$.

(9) A 为Γ 的语义结论, 记为$\Gamma \models A$, 指对于任何模型 (M, σ),
若 $M \models_\sigma \Gamma$, 则 $M \models_\sigma A$.

形式逻辑的基本定律

例3.8（形式逻辑基本定律）.

1. $\models A \vee \neg A$　　排中律

2. $\models \neg(A \wedge \neg A)$　　矛盾律

3. $\models (\forall x(x \doteq x))$　　同一律

引理3.15 若$\Gamma \models A$，则$\Gamma \cup \{\neg A\}$不可满足.

替换引理-项

设(M,σ)为一阶语言$\mathscr{L}$的模型，t，s为$\mathscr{L}$-项，A为$\mathscr{L}$-公式.

引理3.23 $(t[\frac{s}{x}])_{M[\sigma]} = t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$.

证：对t的结构归纳证明$LHS = RHS$如下：

t	LHS	RHS
x	$s_{M[\sigma]}$	$s_{M[\sigma]}$
$y(\neq x)$	$\sigma(y)$	$\sigma(y)$
c	c_M	c_M
$f(u)$	$(f(u)[\frac{s}{x}])_{M[\sigma]} =$ $f_M((u[\frac{s}{x}])_{M[\sigma]}) =$ $f_M(u_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]})$	$(f(u))_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]} =$ $f_M(u_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]})$
$f(t_1, t_2, ..., t_n)$同理		

Q.E.D.

替换引理-公式

引理3.24 $(A[\frac{t}{x}])_{M[\sigma]} = A_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]}$.

证：令ρ为$\sigma[x := t_{M[\sigma]}]$，欲证$(A[\frac{t}{x}])_{M[\sigma]} = A_{M[\rho]}$，

只需证 $M \models_\sigma A[\frac{t}{x}]$ iff $M \models_\rho A$ ...(*)

下面对A的结构作归纳证明(*).

当A为原子公式

Case1. A为$u \doteq v$，这里$u, v \in T$

$$M \models_\rho A[\frac{t}{x}] \text{ iff } M \models_\sigma u[\frac{t}{x}] \doteq v[\frac{t}{x}]$$

$$\text{iff } (u[\frac{t}{x}])_{M[\sigma]} = (v[\frac{t}{x}])_{M[\sigma]}$$

$$\text{iff } u_{M[\rho]} = v_{M[\rho]} \text{ (by 引理3.23)}$$

$$\text{iff } M \models_\rho u \doteq v \text{ iff } M \models_\rho A.$$

Case2. A为$P(t_1, ..., t_n)$.

$$M \models_\sigma A[\frac{t}{x}]$$

$$\text{iff } M \models_\sigma P(t_1[\frac{t}{x}], ..., t_n[\frac{t}{x}])$$

$$\text{iff } ((t_1[\frac{t}{x}])_{M[\sigma]}, ..., (t_1[\frac{t}{x}])_{M[\sigma]}) \in P_M$$

$$\text{iff } ((t_1)_{M[\rho]}, ..., (t_n)_{M[\rho]}) \in P_M \ (by\ \text{引理}3.23)$$

$$\text{iff } M \models_\rho P(t_1, ..., t_n).$$

当A为复合公式

Case3. A为$\neg B$.

$$M \models_\sigma A[\frac{t}{x}]$$

$$\text{iff } M \models_\sigma \neg(B[\frac{t}{x}])$$

$$\text{iff 非} M \models_\sigma B[\frac{t}{x}]$$

$$\text{iff 非} M \models_\rho B \text{ (by I.H.)}$$

$$\text{iff } M \models_\rho \neg B$$

$$\text{iff } M \models_\rho A.$$

Case4. A为$B \wedge C$.

$$M \models_\sigma A[\tfrac{t}{x}]$$

$$\text{iff } M \models_\sigma (B[\tfrac{t}{x}]) \wedge (C[\tfrac{t}{x}])$$

$$\text{iff } M \models_\sigma B[\tfrac{t}{x}] \text{ and } M \models_\sigma C[\tfrac{t}{x}]$$

$$\text{iff } M \models_\rho B \text{ and } M \models_\rho C \text{ (by I.H.)}$$

$$\text{iff } M \models_\rho B \wedge C$$

$$\text{iff } M \models_\rho A.$$

这里利用$M \models_\sigma (A \wedge B)$ iff $(M \models_\sigma A$ and $M \models_\sigma B)$.

Case5. A为$B \vee C$，$B \rightarrow C$，$B \leftrightarrow C$，同理可证.

Case6. A为$\forall y.B$

Subcase6.1 $y \equiv x$.

我们有$\{\sigma[x := a] | a \in M\} = \{\rho[x := a] | a \in M\}$

$M \models_\sigma A[\frac{t}{x}]$

iff $M \models_\sigma \forall x.B$ iff $(\forall x.B)_{M[\sigma]} = T$

iff $B_{M[\sigma[x:=a]]} = T$ for all $a \in M$

iff $B_{M[\rho[x:=a]]} = T$ for all $a \in M$

iff $M \models_\rho \forall x.B$ iff $M \models_\rho A$.

Subcase6.2 $y \not\equiv x$且$y \notin FV(t)$.

$M \models_\sigma A[\frac{t}{x}]$

iff $M \models_\sigma (\forall y.B)[\frac{t}{x}]$

iff $M \models_\sigma \forall y.(B[\frac{t}{x}])$

iff $M \models_{\sigma[y:=a]} B[\frac{t}{x}]$ for all $a \in M$

iff $M \models_{\sigma[y:=a][x:=t_{M[\sigma[y:=a]]}]} B$ for all $a \in M$ (by I.H.)

iff $M \models_{\sigma[y:=a][x:=t_{M[\sigma]}]} B$ for all $a \in M$ (Since $y \notin FV(t)$)

iff $M \models_{\sigma[y:=a][x:=t_{M[\sigma]}]} B$ for all $a \in M$ (Since $y \notin FV(t)$)

iff $M \models_{\sigma[x:=t_{M[\sigma]}][y:=a]} B$ for all $a \in M$ (Since $y \not\equiv x$)

iff $M \models_{\rho[y:=a]} B$ for all $a \in M$.

iff $M \models_{\rho} \forall y.B$ iff $M \models_{\rho} A$.

Subcase6.3 $y \not\equiv x$且$y \in FV(t)$，设z为fresh variable.

$$A[\tfrac{t}{x}] \equiv (\forall y.B)[\tfrac{t}{x}] \equiv (\forall z.B[\tfrac{z}{y}])[\tfrac{t}{x}] \equiv \forall z.B[\tfrac{z}{y}][\tfrac{t}{x}]$$

$M \models_{\sigma} A[\tfrac{t}{x}]$

iff $M \models_{\sigma} (\forall z.B[\tfrac{z}{y}])[\tfrac{t}{x}]$

iff $M \models_{\rho} \forall z.B[\tfrac{z}{y}]$ (by Subcase6.2)

iff $M \models_{\rho[z:=a]} B[\tfrac{z}{y}]$ for all $a \in M$

iff $M \models_{\rho[y:=a]} B$ for all $a \in M$

iff $M \models_{\rho} \forall y.B$.

Case7. A为$\exists y.B$与Case6同理可证. Q.E.D.

例子

Ex.1. $M \models_{\rho[z:=a]} B[\frac{z}{y}]$

iff $M \models_{\rho[y:=a]} B$ 这里 z is fresh.