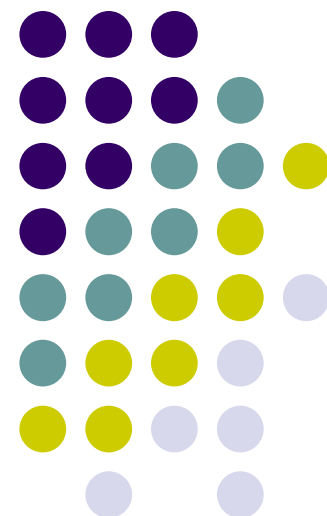




第五讲 - 朴素谓词逻辑





内容提要

- WHY

- 谓词
- 量词
- 函数

- WHAT

- 一阶语言
- 变量/常量-项-公式的层次结构
- 约束变元、自由变元、与替换

- Deeper

- 可满足性、语义结论与协调性

2026/4/3 ➤ 紧性定理、L-S定理、Herbrand定理



Part1 - WHY



命题逻辑的局限性

- 命题逻辑将句子视为**不可分割的原子**，导致内部结构丢失。

三段论推理

- 所有的人都是要死的。
All men are mortal
- 苏格拉底是人。
Socrates is a man
- 所以苏格拉底是要死的。
Socrates is mortal

命题逻辑推理

- P**: 所有的人都是要死的。
 - Q**: 苏格拉底是人
 - R**: 苏格拉底是要死的。
- {P, Q} 推不出 R**



谓词 Predicate

- 描述个体性质或个体间关系的符号
 - 朴素而言，谓词是一个返回True/False的函数
- 一元谓词：描述性质
 - $\text{Man}(x)$: x 是人
 - $\text{Man}(\text{苏格拉底}) \rightarrow \text{True}$
- 多元谓词：描述关系
 - $\text{Teach}(x, y)$: x 和 y 是师徒
 - $\text{Teach}(\text{苏格拉底}, \text{柏拉图}) \rightarrow \text{True}$



量词 Quantifier

- 给谓词描述的个体划定范围
- **全称量词 Universal Quantifier**
 - 符号: \forall
 - 对于论域中的每一个个体/每一组个体们...
 - 所有人都会死: $\forall x (\text{Man}(x) \rightarrow \text{Dead}(x))$
- **存在量词 Existential Quantifier**
 - 符号: \exists
 - 论域中至少存在一个个体/一组个体们...
 - 死的中间有人: $\exists x (\text{Dead}(x) \rightarrow \text{Man}(x))$



函数 Function

- 两个例子
 - $a * b = b * a$
 - 同学们的年龄在17岁以上
- 函数：接受一个或多个个体作为输入，并返回一个新的个体作为输出
 - 谓词输出 **True/False**，函数输出个体
- 两个例子
 - $\forall a, \forall b, \text{multi}(a,b) = \text{multi}(b,a)$
 - $\forall s, \text{age}(s) \geq 17$



Part2- WHAT



一阶语言

- 表达能力限制于“个体”

- 量词：只能对个体进行约束

- 合法： $\forall x (\text{Man}(x))$

- 不合法： $\forall \text{Man}(\text{Man}(x))$

- 谓词与函数：参数只能是有限个独立的个体

- 合法： $\text{Male}(x)$, $\text{Son}(y)$

- 不合法： $\text{IsGender}(\text{Male})$, $\text{Son}(\forall y)$

- 二阶语言能表达什么？

- $\forall P1 (\text{Man}(P) \rightarrow \forall x P1(x))$

如果一个谓词表达了是X是一个人，那么这个谓词只有一个参数



一阶语言的层次结构

- 一阶语言具有严格的层级构造
- 顶层：公式 **formulas**
 - 表达可以判断真假的逻辑命题
- 中层：项 **terms**
 - 指向论语中某个个体的符号串
- 底层：字母表 Alphabet
 - 变量 **$x, y, z...$** ，常量 **$a, b, c...$**
 - 函数符 **$f, g, h...$** ，谓词符 **$P, Q, R...$**
 - 逻辑连接词与量词



约束变元与自由变元

- 同一个变量 x 根据其是否被量词管辖而具有不同逻辑性质
- 量词的辖域 **scope**
 - 量词所作用的公式范围 $(\forall x P(x)) \wedge Q(x)$
- 约束变元 **bound variable**
 - 出现在量词辖域内的变元 $(\forall x P(x)) \wedge Q(x)$
 - 只是一个占位符，由量词和论域决定公式的真值
 - 类似于程序中函数调用过程的局部变量
- 自由变元 **free variable**
 - 没有被任何量词管辖的变量 $(\forall x P(x)) \wedge Q(x)$
 - 它是公式的输入接口，直接决定公式的真值
 - 类似于程序的全局变量



替换 Substitution

- 将公式的“输入接口” (自由变元)接入“数据” (项)的过程
 - $\text{Man}(x) \rightarrow \text{Mortal}(x)$
 - $\text{Man}(\text{苏格拉底}) \rightarrow \text{Mortal}(\text{苏格拉底})$
- 替换是支撑逻辑系统实现希尔伯特纲领的基础
- 类比于程序中的函数调用过程
 - 含有自由变元的公式：函数体
 - 自由变元：形参
 - 替换的项：实参
 - 替换：通过将实参赋值给形参，实现对于函数体的调用



Part3- Deeper



可满足性和语义结论

- 公式 A /公式集合 Γ 是否可以被解释为真
 - 公式 A 可在一个模型下被解释为真
 - 公式集合 Γ 中的所有公式可以在一个模型下被解释为真
 - 寻找一组测试输入，能够让程序输出正确的结果
- 语义结论：在公式集合 Γ 解释为真的模型中，公式 A 一定被解释为真
 - 无关具体模型，而体现了 A 和 Γ 在结构方面的关联性



协调性 Consistency

- 一个公式集合(理论)内部没有逻辑冲突
 - 如果一个公式集 Γ 是协调的, 意味着你不能从 Γ 中同时推导出 **A** 和 **非 A**
 - 如果 Γ 是不协调的, 那么可以从 Γ 中有效地推导出任何结论
- 可满足性: 公式集的外部性质
 - 需要找到一个具体的模型将公式集解释为真
 - **找到能让猜谜程序输出 YOU ARE CORRECT 的输入**
- 协调性: 公式集的内部性质
 - 需要检查公式集之间是否存在矛盾
 - **猜谜程序对任何输入都输出 YOU ARE CORRECT**



紧性定理 Compactness

- 公式集 Γ 可满足的当且仅当它的所有有限子集均可满足
- 矛盾的有限性
 - 如果一个公式集 Γ 不协调，那么一定存在一个有限子集 Δ 不协调
 - 如果程序有问题，那么它一定是某行代码上出了问题，即使这个程序有无穷行代码
- 有穷的推理能够保障无穷的真理
 - 算术系统：有限个算术规则，但能够保障所有自然数的运算
 - 程序验证：一个网站系统的所有有限步骤执行都是安全的



勒文海姆-斯科伦定理

Löwenheim–Skolem Theorem

- 如果一个公式集合 Γ 拥有一个无穷大可满足模型 M ，那么对于任何无限的基数，它一定也拥有一个对应规模的模型 M' 。
 - **向上推论**：如果一个公式集合 Γ 有可数模型，它就一定有不可数模型
 - **向下推论**：如果一个公式集合 Γ 描述了不可数集，它也会有一个“看上去不可数”的可数模型。
- **斯科伦悖论**：一阶语言构建的实数理论其实是可数的
 - 一阶语言无法精确地描述无穷大



埃尔布朗定理 Herbrand Theorem

- 如何找到一阶语言公式 A 的可满足模型？
 - 模型的选择是不可数的，所以无法穷举所有可能性
- 一阶公式 A 是不可满足的，当且仅当它对应的某一组命题逻辑实例在命题逻辑层面上是不可满足的。
 - 命题逻辑实例：**Herbrand实例**
 - 去掉量词，**用具体的项替换变量**，从而将 A “降级”为一组命题逻辑的命题
 - **虽然降级过程可能是无限的，但是如果存在反例，那么反例的降级过程一定是有限的！**
 - 现代定理证明器/逻辑求解器的基石