南京大学
Nanjing University

第三讲 形式化推理系统

内容提要

- 推理系统
  - 永真推理 vs 自然推理
- 自然推理系统
  - 公理
  - 规则
  - 证明树
- 永真推理系统
  - 永真推理系统的公理与规则
  - 基于永真推理系统的证明
  - 推理定理
  - 永真推理系统与自然推理系统的等价性

Part1－ 推理系统

推理系统

- 如何证明命题逻辑结论？
  - 永真式/恒假式/语义结论…
  - 真值表法
  - 语义方法
- 是否可以仅基于命题语法，经过若干次符号变换，推导出所需结论？
  - 不再关注命题符的具体赋值
  - 重点关注推理本身的结构和过程

自然推理系统

- 一种“尽可能模拟人类实际数学推理”的形式化系统

Gerhard Gentzen

- 请证明，如果一个整数 n 是偶数，那么 n^2 能被 4 整除
  - 思路1：“假设与归纳”
  - 思路2：“公理与演绎”

假设-归纳思路

- 引入假设
  - 假设手里有一个具体的整数 n，它是偶数。
- 内部演算
  - 既然 n 是偶数，将其重写为：$n = 2k$ (k为整数)。
  - 计算其平方：$n^2 = (2k)^2 = 4k^2$。
  - $4k^2$ 显然是 4 的倍数。”
- 归纳/推出假设
  - 我们在假设 n 为偶数的情况下，必然得到了 n^2 能被 4 整除的结果。
  - 所以，对于任意整数，若为偶数，则其平方必被 4 整除。

公理-演绎思路

- 检索公理
  - 公理A：偶数的定义是 $n = 2k$”(形式：$P \to Q$)
  - 公理B：代数运算告诉我们 $(2k)^2 = 4k^2$ (形式：$Q \to R$)
  - 公理C：$4k^2$ 的形式意味着能被 4 整除 (形式：$R \to S$)
- 演绎拼接
  - 有真理 $P \to Q$ 和 $Q \to R$，根据传递律，拼出新公理：$P \to R$。”
  - 我有真理 $P \to R$ 和 $R \to S$，再次传递，拼出最终公理：$P \to S$。”
- 得出结论
  - $P \to S$

两种思路的对比

	假设-归纳	公理-演绎
推理方式	设置中继点(假设)，从入口经过中继点一直走到出口(结论)	找三段路线，发现首尾相连，再从头一直走到尾
对“假设”的态度	拥抱假设：把它当作临时的真理	拒绝假设：只允许使用绝对真理
适用场景	适合人类推理	适合机器验证
推理系统	**Gentze系统**	**Hilbert系统**

Part2-自然推理系统G'系统

序贯

- 序贯sequent：G′系统的基本处理单元 Γ ⊢ Δ
  - Γ (Gamma)：前件，公式的集合
  - Δ (Delta)：后件，公式的集合
  - ⊢：推导符，"Γ推导出Δ"
- 序贯描述了G′系统在某一时刻的推导状态
  - Γ：当前的推导可利用的资源
    - 已知条件，假设，公理
    - 资源之间是AND关系，即要求所有条件都成立
  - Δ：当前推导的目标结论
    - 待证明的结论
    - 结论之间是OR关系，即一个结论成立推理就算成功

序贯演算

- $A, A \to B \vdash B$
  - 我有 A，也有规则 $A \to B$，目标是证明 B。
- $A, B \vdash B, C$
  - 我手里有 B，目标清单里也有 B。
- $\vdash A$
  - 左边为空，表示没有假设，必须证明 A 是永真的。

定义1.17. 一个 sequent 是一个二元组 (Γ, Δ)，记为 $\Gamma \vdash \Delta$，这里Γ, Δ为命题的有穷集合（可为空）,称Γ为前件,Δ为后件。命题逻辑的自然推理系统 G' 由以下 公理 和 规则 组成，$\Gamma, \Delta, \Lambda, \Theta$ 表示任何命题有穷集合，A, B 表示任何命题。

- 公理： $\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$
- 规则：

$$\neg L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \neg R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$$

$$\vee L: \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \quad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \vee R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \vee B, \Theta}$$

$$\wedge L: \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \wedge R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, \Theta \quad \Gamma \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \wedge B, \Theta}$$

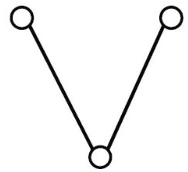
$$\to L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Lambda \quad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \to B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \to R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \to B, \Theta}$$

$$\text{Cut}: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A \quad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$$

树状推理模式

系统 G' 中只有一条公理，有多条规则，每条规则都有名称，呈形 $\dfrac{S'}{S}$ 或 $\dfrac{S_1, S_2}{S}$，这可以被看作树

或



规则的upper sequent S_1, S_2 被称为前提,lower sequent被称为结论。G' 中规则被称为推理规则，规则中被作用的命题被称为主命题，而不变的命题被称为辅命题。

每个公理和规则是模式（schema），它们可有无穷多个实例。

例1.7. $\dfrac{A, B \vdash P, D \qquad A, Q, B \vdash D}{A, P \to Q, B \vdash D}$ 为 $\to L$ 的实例。

有效的序贯

定义1.18. 设 Γ 为 $\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，$\Delta$ 为 $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$，

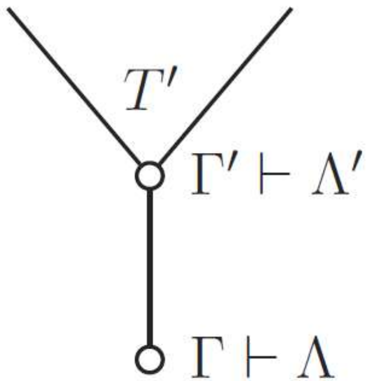
1. $\Gamma \vdash \Delta$ 有反例（falsifiable）指存在赋值 v 使 $v \vDash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_m) \wedge (\neg B_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_n)$ 这时称 v 反驳 $\Gamma \vdash \Delta$。
2. $\Gamma \vdash \Delta$ 有效（valid）指对任何赋值 v，$v \vDash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_m) \to (B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n)$ 这时称 v 满足 $\Gamma \vdash \Delta$。
3. $\Gamma \vdash \Delta$ 有效也被记为 $\Gamma \vDash \Delta$。
4. 当 $m = 0$ 时，$\vdash B_1, \cdots, B_n$ 有反例指 $(\neg B_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_n)$ 可满足；$\vdash B_1, \cdots, B_n$ 有效指 $(B_1 \vee \cdots \vee B_n)$ 永真。
5. 当 $n = 0$ 时，$A_1, \cdots, A_n \vdash$ 有反例指 $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_m)$ 可满足；$A_1, \cdots, A_m \vdash$ 有效指 $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_m)$ 不可满足。
6. 约定 $\{\} \vdash \{\}$ 非有效。

命题1.19. $\Gamma \vdash \Delta$ 有效 iff $\Gamma \vdash \Delta$ 无反例。

证明树

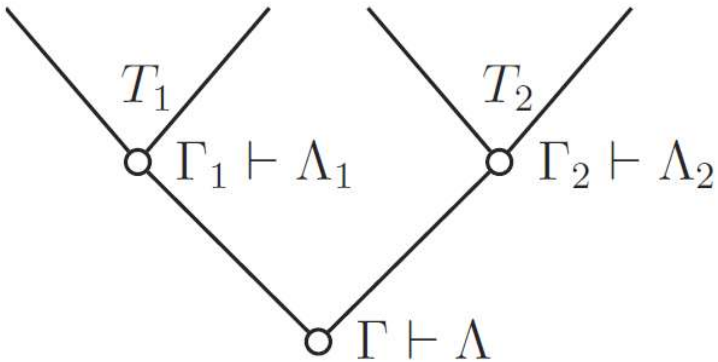
定义1.21. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为 sequent，树 T 为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树指

1. 当 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为 $\mathbf{G}'$ 公理，以 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为节点的单点树 T 为其证明树。
2. 当 $\dfrac{\Gamma' \vdash \Lambda'}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为 $\mathbf{G}'$ 规则，若 T' 为 $\Gamma' \vdash \Lambda'$ 的证明树，则树 T:



为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

3. 当 $\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \quad \Gamma_1 \vdash \Lambda_2}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为 $\mathbf{G}'$ 规则，若T_i 为 $\Gamma_i \vdash \Lambda_i$ 的证明树 $(i = 1, 2)$，树 T:



为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

可证

定义1.22. 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为 sequent，$\Gamma \vdash \Lambda$ 可证（provable）指存在 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

例1.8. 证明

1. $\vdash A \to A$
2. $\vdash A \lor \neg A$
3. $\vdash \neg(A \land \neg A)$

可证。

G’系统推理对有效性的保持

引理1.20. 对于 G' 系统的每条异于 cut 的规则，

1. 赋值 v 反驳规则的结论 iff v 至少反驳规则的一个前提；
2. v 满足规则的结论 iff v 满足规则的所有前提。
3. 对于 G' 中的每条异于 cut 的规则，每个前提有效 iff 结论有效。

注：若 v 反驳 cut 的结论，则 v 至少反驳 cut 的一个前提，反之不然。

反例：

$$\frac{P_1 \vdash P_2 \qquad P_2 \vdash P_3}{P_1 \vdash P_3}\ \text{cut}$$

取 $v(P_1) = v(P_3) = T$，$v(P_2) = F$ 即可。

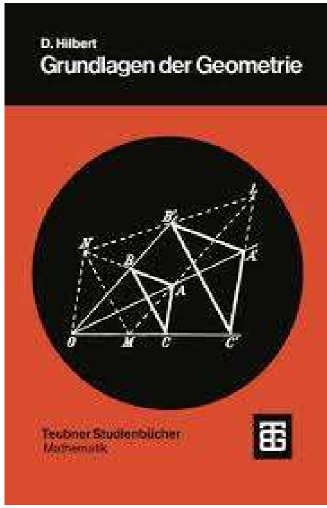
Part3-永真推理系统H系统

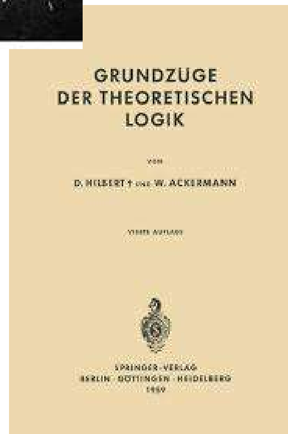
希尔伯特与永真推理系统

- 背景：数学的第三次危机
  - 集合论悖论（罗素悖论，理发师悖论）
  - 一套严谨、无矛盾的形式化体系，来重建数学的基础
- 核心思想：希尔伯特纲领（**Hilbert's Program**）
  - 将数学证明视为纯粹的“符号游戏”
  - 剥离符号的语义含义，仅关注语法的推导规则。
- 目标：证明数学体系的
  - 相容性（**consistency**）：无矛盾
  - 完全性（**completeness**）：无遗漏
  - 可判定性质（**decidability**）：可检查

永真推理系统的历史

- 《几何基础》（1899年）
  - 基于严格公理化定义的欧式几何系统
  - 必须能够把“点、线、面”随时换成“桌子、椅子、啤酒杯”，而定理依然成立。”
- 巴黎数学家大会（1900年）
  - **Hilbert's 23 Problems**
- 《理论逻辑基础》（1928年）
  - 基于公理模式和分离规则的H系统的正式确立
- 希尔伯特纲领的破产（1931年）
  - 《论《数学原理》及有关系统的形式不可判定命题》





永真推理系统-公理

$A01$	$A \to A$
$A02$	$(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$
$A03$	$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
$A04$	$(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$
$A05$	$(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$
$A06$	$(\neg\neg A) \to A$
$A07$	$(A \wedge B) \to A$
$A08$	$(A \wedge B) \to B$
$A09$	$A \to (B \to (A \wedge B))$
$A10$	$A \to (A \vee B)$
$A11$	$B \to (A \vee B)$
$A12$	$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

以上$A, B, C \in PROP$，$A01 - A12$被称为**公理模式(schema)**，

呈形以上公理模式的命题被称为**公理**。

永真推理系统-规则

$$MP \qquad \frac{A \to B \qquad A}{B}$$

- 规则 MP 被称为分离规则，或肯定条件的推理规则（Modus Ponens)。
- 当实施 MP 时，我们称 B 由 $A \to B$ 和 A 实施 MP 而得，有时亦记为 $A \to B, A \vdash B$。

基于永真推理系统的证明

定义8.1 设$A \in PROP, \Gamma \subseteq PROP$，

1. 在H中由Γ推导A（记为$\Gamma \vdash_H A$）指存在序列$P_1, ..., P_n$使A为P_n且对任何$i \leq n$有

   或(a)P_i为H的公理

   或(b)$P_i \in \Gamma$

   或(c)存在$j, k < i$使得P_j为$P_k \to P_i$，

   这时P_i由其前P_j和P_k实施MP而得。

   当H唯一确定时，我们将$\Gamma \vdash_H A$简记为$\Gamma \vdash A$。

2. 称以上的$P_1, ..., P_n$为$\Gamma \vdash A$的证明过程，n为其证明长度。

3. 当$\Gamma \vdash A$时，我们称A为$\Gamma -$ 定理；

   当Γ为空时，简记为$\vdash A$,称A为定理；

   令$Th(\Gamma) = \{A | \Gamma \vdash A\}$。

永真推理系统证明的例子

$T13 \qquad (A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$

证明:

(1)	$(C \to A) \to ((A \to B) \to (C \to B))$	$A03$
(2)	$(1) \to (3)$	$A02$
(3)	$(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$	$MP(2)(1)$

(1),(2),(3)为证明过程。 $\square$

Part3.1-永真推理系统的推理定理

推理定理

定理3. **(推理定理)** 若$\Gamma, C \vdash A$, 则$\Gamma \vdash C \to A$.

这里Γ, C为$\Gamma \cup \{C\}$的简写.

$T23 \qquad (B \to \neg B) \to \neg B$

证明: $\because B, B \to \neg B \vdash \neg B$

由推理定理知$B \vdash (B \to \neg B) \to \neg B$

又$\because \vdash [(B \to \neg B) \to \neg B] \to [B \to \neg(B \to \neg B)]$ $\qquad A05$

$\therefore \vdash B \to (B \to \neg(B \to \neg B))$

又$\vdash [B \to (B \to \neg(B \to \neg B))] \to (B \to \neg(B \to \neg B))$ $\qquad A04$

$\therefore \vdash B \to \neg(B \to \neg B)$

从而$\vdash (B \to \neg B) \to \neg B$

推理定理的证明

引理8.2

1. 若A为公理，则$\Gamma \vdash A$
2. 若$A \in \Gamma$，则$\Gamma \vdash A$
3. 若$\Gamma \vdash A$且$\Gamma \vdash A \to B$，则$\Gamma \vdash B$
4. 若$\Gamma \vdash A \to (A \to B)$，则$\Gamma \vdash (A \to B)$
5. 若$\Gamma \vdash C \to (B \to A)$且$\Gamma \vdash C \to B$，则$\Gamma \vdash C \to A$

证明(5): 由T16知$\Gamma \vdash [C \to (B \to A)] \to [(C \to B) \to (C \to A)]$

可证，设它的证明过程为$P_1, \ldots, P_l$。

$\Gamma \vdash C \to (B \to A)$与$\Gamma \vdash C \to B$的证明 过程

分别为$Q_1, \ldots, Q_m$和$R_1, \ldots, R_n$。

从而$\Gamma \vdash C \to A$的证明过程为

$P_1, \ldots, P_l, Q_1, \ldots, Q_m, R_1, \ldots, R_n, (C \to B) \to (C \to A), C \to A.$

故$\Gamma \vdash C \to A$可证. $\square$

推理定理的证明

定理8.3 (推理定理). 若$\Gamma, C \vdash A$, 则$\Gamma \vdash C \to A$.

这里Γ, C为$\Gamma \cup \{C\}$的简写.

证明: 设$\Gamma, C \vdash A$,对$\Gamma, C \vdash A$的证明过程$A_1, \ldots, A_n$的长度做归纳来证明$\Gamma \vdash C \to A$.

情况1. A为公理或$A \in \Gamma$,

易见$\Gamma \vdash A$, 又$\Gamma \vdash A \to (C \to A)$ (T15)

从而由引理 8.2 3)知$\Gamma \vdash C \to A$.

情况2. C为A, 从而$\Gamma \vdash A \to A$, 即$\Gamma \vdash C \to A$.

情况3. A_n由A_i, A_j实施MP而得,

这里$i, j < n$且A_i为$A_j \to A_n$.

归纳假设: $\Gamma \vdash C \to A_i$, $\Gamma \vdash C \to A_j$.

以下分情况证明$\Gamma \vdash C \to A_n$

子情况3.1 A_j为C.

因为$\Gamma \vdash C \to A_i$, 且A_i为$C \to A$,

从而$\Gamma \vdash C \to (C \to A)$, 由引理8.2 4)知$\Gamma \vdash C \to A$.

子情况3.2 A_j不为C. 因为$\Gamma \vdash C \to A_i$, $\Gamma \vdash C \to A_j$

即$\Gamma \vdash C \to (A_j \to A)$, 且$\Gamma \vdash (C \to A_j)$, 从而

由引理8.2 5)知$\Gamma \vdash C \to A$.

$\square$

Part3.2-H系统与G'系统的等价性

G'系统与H系统的等价性

- G'系统与H系统的证明能力是等价的
  - **定理8.4** 若命题A在H系统中可证，则序贯$\vdash A$在G'系统中可证
    - 证明思路：**H系统公理**在G'系统中可证，**H系统规则**在G'系统中有效
    - 用G'系统“implement”H系统
  - **定理8.5** 若序贯$\Gamma \vdash \Delta$在G'系统中可证，则$\Gamma \vdash \overline{\Delta}$在H系统中可证
    - 证明思路：**G系统公理**在H系统中可证，**G系统规则**在H系统中有效
    - 用H系统“implement”G'系统

定理8.4 设 A 为命题，若 A 在 H 中可证，则 sequent $\vdash A$ 在 G' 中可证。

证明： 设A在H中可证，对$\vdash_H A$的证明过程的长度归纳证明$\vdash A$在G'中可证.

情况I. A为公理, 即A为A01或A02⋯或A12

(01)
$$\frac{A \vdash A}{\vdash A \to A} \to R$$

(02)
$$\dfrac{\dfrac{B \to C, B, A \vdash A, C \qquad \dfrac{C, B, A \vdash C \qquad C, B, A \vdash B, C}{(B \to C), B, A \vdash C} \to L}{\dfrac{\dfrac{A \to (B \to C), B, A \vdash C}{A \to (B \to C), B \vdash A \to C} \to R}{A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)} \to R} \to L}{\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))} \to R$$

(03)(04)同理可证

(05)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A \qquad \dfrac{A, B \vdash B}{A, \neg B, B \vdash}}{A, A \to \neg B, B \vdash} \to L}{A \to \neg B, B \vdash \neg A} \to R}{A \to \neg B \vdash B \to \neg A} \to R}{\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)} \to R$$

(06)易见

(07)

$$\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A}{A \wedge B \vdash A} \wedge L}{\vdash (A \wedge B) \to A} \to R$$

(08)与(07)同理

(09), (10)和(11)易见

(12)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{B\to C, A\vdash A, C \qquad C, B\vdash C, A\vdash C}{A\to C, B\to C, A\vdash C}\to L \qquad \dfrac{A\to C, B\vdash C, B \qquad A\to C, C, B\vdash C}{A\to C, B\to C, B\vdash C}\to L}{A\to C, B\to C, A\vee B\vdash C}\to L}{\vdash (A\to C)\to((B\to C)\to((A\vee B)\to C))}\to R\ \text{(3times)}
$$

情况II. A由$B\to A$和B实施MP而得

由I.H.知sequent $\vdash B\to A$和$\vdash B$在G'中可证，

在G中证明$\vdash A$如下：

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{B\vdash A, B \qquad B, A\vdash A}{B\to A, B\vdash A}\to L \qquad \vdash B}{B\to A\vdash A}\text{Cut} \qquad \vdash B\to A}{\vdash A}\text{Cut}
$$

因此$\vdash A$得证。 $\square$

定理8.5 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G' 中可证，则在 H 中$\Gamma \vdash \overline{\Delta}$, 这里

$$\overline{\Delta} \overset{=}{\underset{\Delta}{=}} \begin{cases} (...(B_1 \vee B_2)... \vee B_n) & \Delta \neq \emptyset \text{and} \Delta = \{B_1, ..., B_n\} \\ \perp & \Delta = \emptyset \end{cases}$$

记$\perp$为$(C \wedge \neg C)$

证明： 设$\Gamma \vdash \Delta$在G'中可证，对$\Gamma \vdash \Delta$的证明结构做归纳来证明$\Gamma \vdash \overline{\Delta}$在H中成立。

情况1. $\Gamma \vdash \Delta$为公理，设为$\Phi, A \vdash \Lambda, A$

(1.1) 当Λ空时, 易见$\Phi, A \vdash_H A$

(1.2) 当Λ非空, $\Phi, A \vdash_H \overline{\Lambda} \vee A$的证明过程如下:

(1)	A	假设
(2)	$A \to \overline{\Lambda} \vee A$	公理
(3)	$\overline{\Lambda} \vee A$	MP(2)(1)

情况2. $\Gamma \vdash \Delta$由实施规则而得

(2.1) 对于规则 $\neg L: \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$

当Δ为空时, 由I.H.知, $\Gamma \vdash_H A$,

我们证明$\Gamma, \neg A \vdash C \wedge \neg C$如下:

(1) A $\qquad (\Gamma \vdash_H A)$

(2) $\neg A$ $\qquad$ (假设)

(3) $A \wedge \neg A$

(4) $C \wedge \neg C$ $\qquad$ (T32)

当Δ非空时, 由I.H.知$\Gamma \vdash_H \overline{\Delta} \vee A$,

$\Gamma, \neg A \vdash_H \overline{\Delta}$的证明如下:

(1) $\neg A$ $\qquad$ (假设)

(2) $\overline{\Delta} \vee A$ $\qquad \Gamma \vdash \overline{\Delta} \vee A$

(3) $(\overline{\Delta} \vee A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \overline{\Delta})$ $\qquad$ T25

(4) $\overline{\Delta}$ $\qquad$ MP(MP(3)(2))(1)

(2.2) 对于规则 $\neg R: \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$

当Δ为空时，由I.H. 知$\Gamma, A \vdash_H \perp$,

由推理定理得$\Gamma \vdash_H A \to \perp$

又 $\vdash_H (A \to \perp) \to \neg A$ $\quad T24$

从而$\Gamma \vdash_H \neg A$.

当Δ非空时，由I.H. 知$\Gamma, A \vdash_H \overline{\Delta}$

由推理定理得$\Gamma \vdash_H A \to \overline{\Delta}$

又 $\vdash_H (A \to \overline{\Delta}) \to \overline{\Delta} \vee (\neg A)$ $\quad T26$

故$\Gamma \vdash_H \overline{\Delta} \vee (\neg A)$.

(2.3) 对于规则 $\vee L : \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$

当Δ为空时，由I.H. 知$\Gamma, A \vdash_H \bot$，$\Gamma, B \vdash_H \bot$，

由推理定理得$\Gamma \vdash_H A \to \bot$且$\Gamma \vdash_H B \to \bot$

又$\vdash_H (A \to \bot) \to [(B \to \bot) \to ((A \vee B) \to \bot)]$ (A12)

从而$\Gamma \vdash_H (A \wedge B) \to \bot$, 因此$\Gamma, A \vee B \vdash \bot$.

当Δ非空时, 由I.H. 知$\Gamma, A \to_H \overline{\Delta}$，$\Gamma, B \vdash_H \overline{\Delta}$

与上同理得$\Gamma, A \vee B \vdash \overline{\Delta}$.

(2.4) 对于规则 $\vee R : \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$

由I.H. 得$\Gamma \vdash_H (\overline{\Delta} \vee A) \vee B$,

由T27知$\Gamma \vdash_H \overline{\Delta} \vee (A \vee B)$

(2.5) 对于规则 $\wedge L: \dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$

由I.H.得$\Gamma, A, B \vdash_H \overline{\Delta}$, 由推理定理得$\Gamma \vdash_H A \to (B \to \overline{\Delta})$

$\Gamma \vdash_H A \to (B \to \overline{\Delta}) \to [(A \wedge B) \to \overline{\Delta}] \quad (T28)$

故$\Gamma \vdash (A \wedge B) \to \overline{\Delta}$.

(2.6) 对于规则 $\wedge R: \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, (A \wedge B)}$

当Δ为空时, 易见.

当Δ非空时, 由I.H.知, $\Delta \vdash_H \overline{\Delta} \vee A$,

$\Gamma \vdash \overline{\Delta} \vee B$

$\because \vdash_H (\overline{\Delta} \vee A) \to ((\overline{\Delta} \vee B) \to (\overline{\Delta} \vee (A \wedge B))) \quad T29$

$\therefore \Gamma \vdash \overline{\Delta} \vee (A \wedge B)$

(2.7) 对于规则 $\to L: \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}$

当Δ为空时, 由I.H. 知$\Gamma \vdash_H A, \Gamma, B \vdash_H \perp$

从而$\Gamma \vdash_H B \to \perp$, 易见$\Gamma, A \to B \vdash_H \perp$

当Δ非空时, 由I.H.知$\Gamma \vdash_H \overline{\Delta} \vee A, \Gamma, B \vdash_H \overline{\Delta}$,

从而$\Gamma \vdash_H B \to \overline{\Delta}$, 又

$\because \vdash_H (C \vee A) \to [(B \to C) \to ((A \to B) \to C)]$ $T30$

这里取C为$\overline{\Delta}$,

$\therefore \Gamma, A \to B \vdash_H \overline{\Delta}$

(2.8) 对于规则 $\to R: \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B}$

当Δ为空时, 由I.H. 知$\Gamma, A \vdash_H B$

从而由推理定理知$\Gamma \vdash_H A \to B$.

当Δ非空时, 由I.H. 知$\Gamma, A \vdash_H \overline{\Delta} \vee B$

从而$\Gamma \vdash A \to (\overline{\Delta} \vee B)$

又

$$\vdash_H (A \to (C \vee B)) \to (C \vee (A \to B)) \qquad T31$$

取C为$\overline{\Delta}$,

故$\Gamma \vdash_H \overline{\Delta} \vee (A \to B)$

归纳完成. $\square$

推论8.6 $\vdash A$ 在 G' 中可证 $\Leftrightarrow$ A 在 H 中可证。

这就说明 G' 与 H 等价。