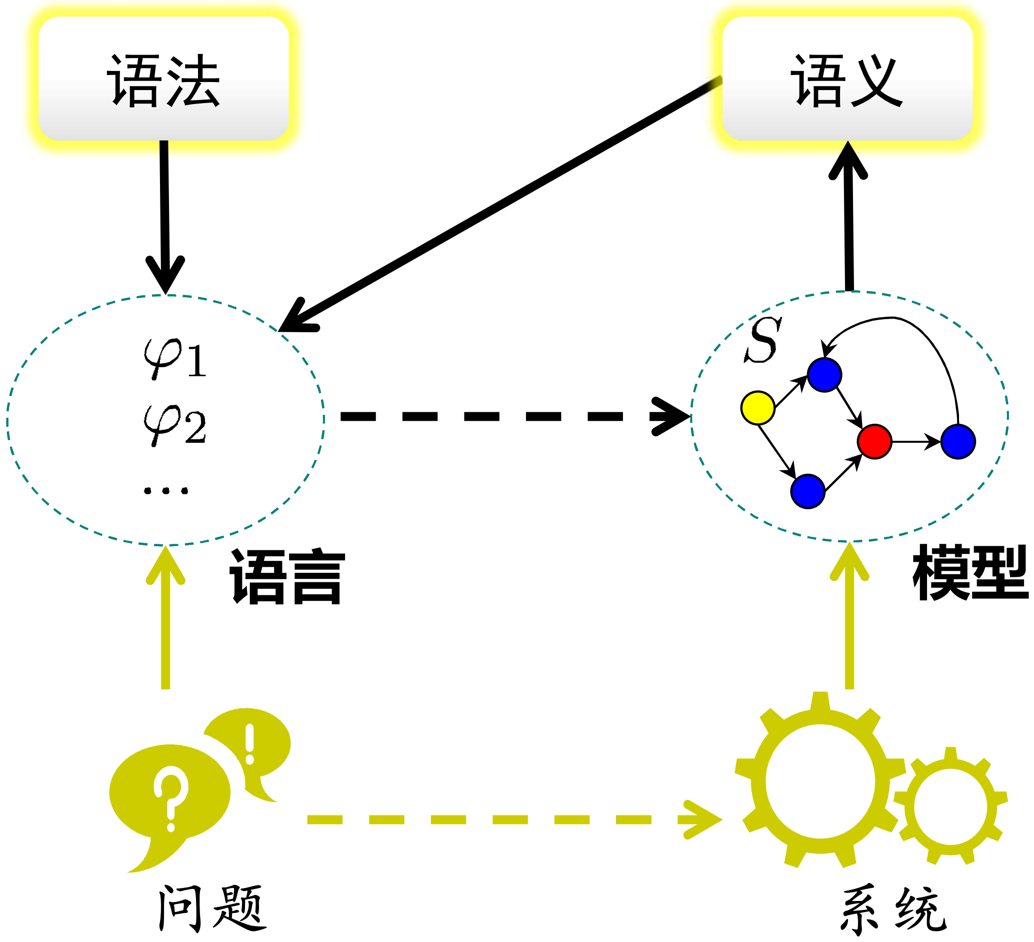
南京大学
Nanjing University

第二讲 形式化命题逻辑

内容提要

- 命题逻辑的语法
  - 符号表
  - 命题的定义
  - 结构归纳法
- 命题逻辑的语义
  - 什么是语义
  - 析合/合析范式 | 逻辑等价

语法和语义



Part1－ 命题逻辑的语法

字母表

定义1.1 (字母表). 字母表由以下成份组成:

1. 命题符:$P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots, n \in \mathbf{N}$,记 $PS = \{P_n \mid n \in \mathbf{N}\}$
2. 联结词:$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$
3. 辅助符:“(”, “)”

注:

1. 本讲义中,命题符之集 PS 为可数无穷集,i.e. $|PS| = \aleph_0$。
2. 有些教科书还引入其他一些联结词,如 $\leftrightarrow$ 等。
3. 为了表达更清楚,我们可再引入一些辅助符,如 [,] 等。

命题的定义

定义1.2 (命题).

1. 命题符为命题;
2. 若 A，B 为命题，则
   $(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$ 和 $(A \rightarrow B)$ 为命题;
3. 命题仅限于此。

定义1.3 (命题集). 所有命题的集合 $PROP$ 是满足以下条件的最小集合：

1. $PS \subseteq PROP$；
2. 若 $A \in PROP$，则 $C_{\neg}(A) \in PROP$；
3. 若 $A, B \in PROP$，则
   $\mathrm{C}_{\wedge}(A, B)$，$C_{\vee}(A, B)$ 和 $C_{\rightarrow}(A, B) \in PROP$；

构造序列

引理1.5 $A \in PROP$等价于存在有穷序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 使 A 为 A_n 且对任何 $i \le n$,

或(a) $A_i \in PS$

或(b) 存在 $k < i$ 使 A_i 为 $(\neg A_k)$

或(c) 存在 $k, l < i$ 使 A_i 为 $(A_k * A_l)$,

这里 $*$ 为 $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ 之一。

以上序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 被称为 A 的构造序列。

证明：令 $PROP' = \{A \mid$ 存在有穷序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 使 A_n为A 且对任何 $i \leq n$ 或 (a) $A_i \in PS$ 或 (b) 存在 $k < i$ 使 A_i 为 $(\neg A_k)$ 或 (c) 存在 $k, l < i$ 使 A_i 为 $(A_k * A_l)$, 这里 $*$ 为 $\wedge, \vee, \rightarrow$ 之一。$\}$

欲证 $PROP = PROP'$，只需证

(1) $PROP' \subseteq PROP$ 和 (2) $PROP \subseteq PROP'$

(1) 设 $A \in PROP'$，从而有 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 满足对任何 $i \le n$ 有(a) 或 (b) 或 (c)。对 i 归纳证明 $A_i \in PROP$。

Basis $i = 0$，易见 $A_0 \in PS$ 从而 $A_0 \in PROP$

I.H. 设对任何 $k < i$ 有 $A_k \in PROP$

Ind. Step 对于i

Case(a) $A_i \in PS$ 从而 $A_i \in PROP$

Case(b) A_i 为 $(\neg A_k)$，这里 $k < i$，从而由 I.H.知$A_k \in PROP$，因此 $A_i \in PROP$

Case(c) A_i 为 $(A_k * A_l)$，这里 $k, l < i$，从而由 I.H.知 $A_k, A_l \in PROP$，因此 $A_i \in PROP$

归纳完成，故 $A_n \in PROP$，因此 $PROP' \subseteq PROP$。

(2) 由于 $PROP$ 为满足定义 1.3 中条件 (1)-(3) 的最小集合，

故只需证 $PROP'$ 满足定义1.3中条件 (1)-(3)。

易见 $PS \subseteq PROP'$，又当 $A, B \in PROP'$ 时

A, B 有构造序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 和 $B_0, B_1, \cdots, B_m$，从而

$(\neg A)$有构造序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n, (\neg A)$，且

$(A * B)$有构造序列$A_0, A_1, \cdots, A_n, B_0, B_0, \cdots, B_m, (A * B)$，

从而 $PROP'$ 满足定义 1.3 中的条件，故 $PROP \subseteq PROP'$。

□

结构归纳

- 每个命题皆有构造过程，构造过程不一定唯一。
- 若 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 为 A 的最短构造过程，
  则称 n 为 A 的构造长度。
- 下面常常会对 A 的结构作归纳证明一些性质，
  事实上是对 A 的构造长度作归纳，而这是自然数上的归纳。

括号引理（Parenthesis Lemma）

引理1.4 (括号引理). 若 A 为命题，则 A 中所有左括号的个数等于右括号的个数。

Part2- 命题逻辑的语义

命题的语义

- 什么是命题的语义？
  - 为命题提供一个**解释** $\hat{v} : PROP \rightarrow \{T, F\}$
- 如何定义命题的语义？
  - 如何处理命题符：**赋值** $v : PS \rightarrow \{T, F\}$
  - 如何处理连接词：**布尔函数 H_***

联结词定义的布尔函数

定义1.6. 令真值集 $\mathbf{B} = \{T, F\}$，

- 联结词 $\neg$ 被解释为一元函数 $H_\neg : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$；
- 联结词 $*$ 被解释为二元函数 $H_* : \mathbf{B}^2 \to \mathbf{B}$，这里$* \in \{\wedge, \vee, \to\}$；
- $H_\neg$，$H_\wedge$，$H_\vee$，$H_\to$ 定义如下：

P	Q	$H_\neg(P)$	$H_\wedge(P,Q)$	$H_\vee(P,Q)$	$H_\to(P,Q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T

命题的语义的归纳定义

定义1.7 (命题的语义).

- v 为一个赋值指它为函数 $v: PS \to \mathbf{B}$，
  从而对任何命题符 P_i，$v(P_i)$ 为T或F。
- 对于任何赋值 v，定义 $\hat{v}: PROP \to \mathbf{B}$ 如下：

  $\hat{v}(P_n) = v(P_n)$，$n \in \mathbf{N}$；

  $\hat{v}(\neg A) = H_\neg(\hat{v}(A))$；

  $\hat{v}(A * B) = H_*(\hat{v}(A), \hat{v}(B))$，这里 $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$。

对于命题 A，它的解释 $\hat{v}(A)$ 为 T 或 F。

事实上，真值 $\hat{v}(A)$ 仅与 A 中出现的命题符有关。

Meta-language

注意 $\models$ 不是语言中的符号, 而是在上层语言(meta-language)中。

在上层语言中, 人们也需要用联结词如not, and, or, imply 等,

例如我们有

- $v \models \neg A$ iff not $v \models A$
- $v \models (A \wedge B)$ iff $(v \models A)$ and $(v \models B)$
- $v \models (A \vee B)$ iff $(v \models A)$ or $(v \models B)$
- $v \models (A \to B)$ iff $(v \models A)$ implies $(v \models B)$

命题逻辑的自由变元

设 A 为命题，令 $FV(A) = \{ P \in PS \mid P \text{ 出现于 } A \text{ 中} \}$。

引理1.8. 设 A 为命题，v_1, v_2 为赋值，

若 $v_1 \restriction FV(A) = v_2 \restriction FV(A)$，则 $\hat{v}_1(A) = \hat{v}_2(A)$。

证明: 设 $v_1 \restriction FV(A) = v_2 \restriction FV(A)$，即对于 $P \in FV(A)$，$v_1(P) = v_2(P)$。以下对 A 的结构作归纳证明 $\hat{v}_1(A) = \hat{v}_2(A) \ldots (*)$。

Basis 当 $A \in PS$ 时，易见 (*) 成立。

I.H. 设 A为B，C 时 (*) 成立。

Ind. Step

情况$\neg$：A 为 $\neg B$，

$$\hat{v}_1(A) = \hat{v}_1(\neg B) = H_\neg(\hat{v}_1(B)) \overset{I.H.}{=} H_\neg(\hat{v}_2(B)) = \hat{v}_2(\neg B) = \hat{v}_2(A)$$

情况$*$：$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$，$A$ 为 $B * C$。

$$\hat{v}_1(A) = \hat{v}_1(B * C) = H_*(\hat{v}_1(B), \hat{v}_1(C)) \overset{I.H.}{=} H_*(\hat{v}_2(B), \hat{v}_2(C))$$
$$= \hat{v}_2(B * C) = \hat{v}_2(A)$$

例1.1. 设 A 为 $(\neg((P \to Q) \wedge (Q \to P)))$，$v$ 为赋值且 $P, Q \in PS$。若 $v(P) = T, v(Q) = F$，则计算 $\hat{v}(A)$ 如下表：

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$	A
T	F	F	T	F	T

永真、可满足、语义结论

定义1.9. 设 A 为命题，v 为赋值。

1. v 满足 A，记为 $v \vDash A$，指 $\hat{v}(A) = T$；
2. A 为永真式 (tautology)，记为 $\vDash A$，指对任何 v 有 $\hat{v}(A) = T$；
3. A 可满足指有 v 使 $v \vDash A$；
4. 设 Γ 为命题集，A 为 Γ 的语义结论，记为 $\Gamma \vDash A$，指对所有 v，若对任何 $B \in \Gamma$ 有 $\hat{v}(B) = T$ 则 $\hat{v}(A) = T$。

例1.2. $A \to A$，$\neg\neg A \to A$，$(A \wedge B) \to (B \wedge A)$ 为永真式。

例1.3. 证明$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ 为永真式。

证明：用下列的真值表法

A	B	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

$\square$

逻辑连接词组的表达能力

- 为什么四个逻辑连接词就够了？

- 如何联系命题语义与逻辑连接词?
  - Meta level下命题语义的描述：真值函数
  - Meta level下命题语义的等价：逻辑等价
  - Meta level下相同语义的命题的构造方法：析合范式/合析范式

真值函数

定义1.10. 设 A 为命题，$FV(A)=\{Q_1,\cdots,Q_n\}$。

n 元函数 $H_A:\mathbf{B}^n\mapsto\mathbf{B}$ 定义如下：

对于任何 $(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{B}^n$，$H_A(a_1,\cdots,a_n)=\hat{v}(A)$，

这里赋值 v 满足 $v(Q_i)=a_i(1\le i\le n)$。

下面称 $f:\mathbf{B}^n\mapsto\mathbf{B}$ 为n元真值函数，称H_A为由A定义的真值函数。

例1.4. 设 A 为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$，由下列真值表知 $H_A : \mathbf{B}^2 \mapsto \mathbf{B}$ 为不可兼或运算。

P	Q	A	$H_A(P,Q)$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

由 A 可定义真值函数 H_A，反之给定真值函数 $f : \mathbf{B}^n \mapsto \mathbf{B}$，是否存在命题 A 使 $f = H_A$？

逻辑等价

定义1.13. 设 A，B 为命题，A 与 B 逻辑等价，记为 $A \simeq B$，指对任何赋值 v，

$$v \vDash A \text{ iff } v \vDash B$$

命题1.14.

1. $A \simeq A$;
2. 若 $A \simeq B$，则 $B \simeq A$;
3. 若 $A \simeq B$ 且 $B \simeq C$，则 $A \simeq C$;
4. 若 $A \simeq B$，则 $(\neg A) \simeq (\neg B)$;
5. 若 $A_1 \simeq B_1$ 且 $A_2 \simeq B_2$，则 $(A_1 * A_2) \simeq (B_1 * B_2)$ 这里 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$。

析取范式(DNF)/合取范式(CNF)

定义1.11.

1. 命题 A 为析合范式 ($\vee\wedge$-nf) 指 A 呈形 $\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{k=1}^{n} P_{i,k})$，这里 $P_{i,k}$ 为命题符或命题符的否定(即呈形 $\neg P_i$)。
2. 命题 A 为合析范式 ($\wedge\vee$-nf) 指 A 呈形 $\bigwedge_{j=1}^{l}(\bigvee_{k=1}^{n} Q_{j,k})$，这里 $Q_{j,k}$ 为命题符或命题符的否定。

以上

- $\bigwedge_{k=1}^{n} B_k$ 为 $(\ldots(((B_1 \wedge B_2) \wedge B_3) \ldots \wedge B_n) \ldots)$ 的简写；
- $\bigvee_{k=1}^{n} B_k$ 为 $(\ldots(((B_1 \vee B_2) \vee B_3) \ldots \vee B_n) \ldots)$ 的简写。

任意真值函数均可表示为范式

定理1.12. 设 $f: \mathbf{B}^n \mapsto \mathbf{B}$。

1. 存在命题 A 其为 $\vee\wedge$-nf 使 $f = H_A$；
2. 存在命题A' 其为 $\wedge\vee$-nf 使 $f = H_{A'}$。

Proof. 设$f: \mathbf{B}^n \mapsto \mathbf{B}$，令

- $T_f = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{B}^n \mid f(x_1, \cdots, x_n) = T\}$
- $F_f = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{B}^n \mid f(x_1, \cdots, x_n) = F\}$

$\because T_f$ 和 F_f 皆为有穷集，$\therefore$ 可设

- $T_f = \{(a_{i1}, \cdots, a_{in}) \in \mathbf{B}^n \mid 1 \leq i \leq m\}$
- $F_f = \{(b_{j1}, \cdots, b_{jn}) \in \mathbf{B}^n \mid 1 \leq j \leq l\}$

这里 $m+l=2^n$。令

$$P_{i,k}^* = \begin{cases} P_k, & 若\ a_{ik}=T, \\ \neg P_k, & 若\ a_{ik}=F. \end{cases}$$

$$A = \bigvee_{i=1}^{m} (\bigwedge_{k=1}^{n} P_{i,k}^*)$$

又令

$$Q_{j,k}^* = \begin{cases} \neg P_k, & 若\ b_{jk}=T, \\ P_k, & 若\ b_{jk}=F. \end{cases}$$

$$A' = \bigwedge_{j=1}^{l} (\bigvee_{k=1}^{n} Q_{jk}^*)$$

易见 $FV(A)=\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$。
欲证 $H_A=f$，
只需证　令 $v(P_i)=x_i$，我们有 $f(x_1,\ldots,x_n)=\hat{v}(A)$
只需证　$\hat{v}(A)=T$ iff $(x_1,\ldots,x_n)\in T_f$，i.e.　$v \models A$ iff $(x_1,\ldots,x_n)\in T_f$

$\because$

$$P_{i,k}^* = \begin{cases} P_k, & \text{若 } a_{ik} = T, \\ \neg P_k, & \text{若 } a_{ik} = F. \end{cases}$$

$$v \vDash A \text{ iff } v \vDash \bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{k=1}^{n} P_{i,k}^* \right)$$

$$\text{iff 有 } i \le m \text{ 使 } \quad v \vDash \left(\bigwedge_{k=1}^{n} P_{i,k}^* \right)$$

iff 有 $i \le m$ 使　对所有 $k \le n$ 有　$v \vDash P_{i,k}^*$

iff 有 $i \le m$ 使　对所有 $k \le n$ 有　$\hat{v}(P_{i,k}^*) = T$

iff 有 $i \le m$ 使　对所有 $k \le n$ 有　$v(P_k) = a_{ik}$

iff 有 $i \le m$ 使　对所有 $k \le n$ 有　$x_k = a_{ik}$

iff 有 $i \le m$ 使　$(x_1, \ldots, x_n) = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$

iff $(x_1, \ldots, x_n) \in T_f$

$\therefore H_A = f$，同理可证 $H_{A'} = f$。 $\square$

例1.5. 求 $((P \wedge Q) \to R) \wedge P$ 的 $\wedge\vee$-nf 和 $\vee\wedge$-nf。

Solution. 不妨设 $P, Q, R \in PS$
先计算出下列真值表

P	Q	R	$((P \wedge Q) \to R) \wedge P$	$\vee\wedge$-nf	$\wedge\vee$-nf
T	T	T	T	$P \wedge Q \wedge R$	
T	T	F	F		$\neg P \vee \neg Q \vee R$
T	F	T	T	$P \wedge \neg Q \wedge R$	
T	F	F	T	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	
F	T	T	F		$P \vee \neg Q \vee \neg R$
F	T	F	F		$P \vee \neg Q \vee R$
F	F	T	F		$P \vee Q \vee \neg R$
F	F	F	F		$P \vee Q \vee R$

它的 $\vee\wedge$-nf:

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

它的 $\wedge\vee$-nf:

$$(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$$

□

任意两个具有相同命题符集的命题，它们逻辑等价 iff 它们定义的真值函数相等

命题1.15. 设 $FV(A \wedge B) = \{Q_1, \cdots, Q_n\}$ 且 $H_A : \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$，$H_B : \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{B}$。我们有 $A \simeq B$ iff $H_A = H_B$。

命题1.16. 若 A 为命题，则存在 $\wedge\vee$-nf B 和 $\vee\wedge$-nf B' 使 $A \simeq B$ 且 $A \simeq B'$，这时称 B 和 B' 分别为 A 的 $\wedge\vee$-nf 和 $\vee\wedge$-nf。

任意命题均有逻辑等价的范式

证明： 由定理1.12 和命题1.15 即得。

任意真值函数均可表示为范式

联结词的完全组

由定理1.12 知，对于任何 n 元真值函数 f，存在命题 A 其中仅用联结词 $\neg$，$\wedge$，$\vee$ 使 $f = H_A$。

这就说明 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是所谓联结词的函数完全组。

又由于

- $A \wedge B \simeq \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \vee B \simeq \neg(\neg A \wedge \neg B)$

故 $\{\neg, \wedge\}$，$\{\neg, \vee\}$，$\{\neg, \rightarrow\}$ 亦为联结词的函数完全组。

例1.6. 求 $\neg((P \wedge Q) \to R)$ 的 $\wedge\vee$-nf 和 $\vee\wedge$-nf。

Solution.

$$\begin{aligned}
&\because \neg((P \wedge Q) \to R) \\
&\simeq \neg(\neg(P \wedge Q) \vee R) \\
&\simeq \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee R) \\
&\simeq \neg(\neg P \vee \neg Q \vee R) \\
&\simeq (\neg\neg P) \wedge (\neg\neg Q) \wedge \neg R \\
&\simeq P \wedge Q \wedge \neg R
\end{aligned}$$

$\therefore P \wedge Q \wedge \neg R$ 既为原式的 $\wedge\vee$-nf 又为 $\vee\wedge$-nf。