南京大学
Nanjing University

第一讲 朴素命题逻辑

内容提要

- 命题与连接词
- 命题的真值
  - 重言式
  - 矛盾式
- 命题之间的关系
  - 逻辑等价
  - 逻辑蕴含
- 推理的有效形式

朴素 vs. 形式化

朴素逻辑系统	形式化逻辑系统
简单命题 simple assertion	命题符 propositional variable
命题 proposition	命题 proposition
推理形式 reasoning form	证明 proof
真值 truth value	解释 interpretation

Part1 - 命题与连接词

逻辑系统

- 语言 Language
  - 如何表达？
- 证明 Proving
  - 如何推理？
- 解释 Interpretation
  - 如何判断真假？

一个形式化的逻辑系统即是严格分离语言(通过语法)，证明(通过证明论)，以及解释(通过语义和模型论)的逻辑系统

朴素的逻辑系统对于语言和证明过程的语法和语义不进行明确的区分

秦老师不上数理逻辑和辩证法？

命题

- 可以被判断真假的句子
  - 秦老师说话有逻辑 ？

- 简单命题：由一个主语和一个谓语构成的简单句子
  - 秦老师上数理逻辑课
- 复合命题：由一些简单命题通过连接词(connective)组合而成
  - 秦老师上数理逻辑课而且不上辩证法课

- 可以使用命题变量(P,Q,S,…)来代指一个命题

逻辑连接词

中文名称	英文名称	数学符号	读法
否定	Negation	$\neg$	不是 not
合取	Conjunction	$\wedge$	并且 and
析取	Disjunction	$\vee$	或者 or
蕴含	Implication	$\rightarrow$	若P则Q imply
双向蕴含	Biconditional	$\leftrightarrow$	当且仅当 if and only if

这五个逻辑连接词是否足以支持
一切可能的复合命题？

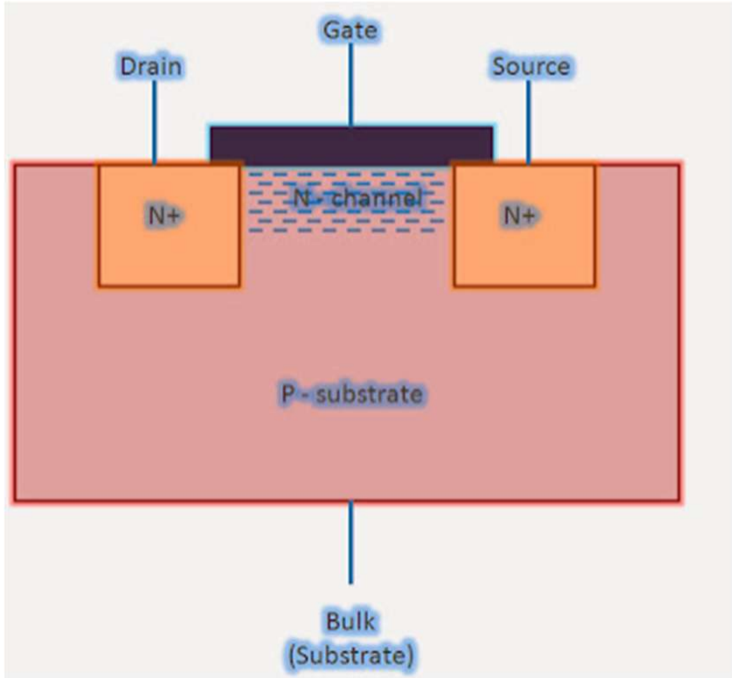
其他逻辑连接词

中文名称	英文名称	数学符号	解释
异或	Exclusive OR	$\oplus$	要么P要么Q
与非	NAND	$\uparrow$	P,Q不都为真
或非	NOR	$\downarrow$	P,Q都为假

- 异或：
  - “套餐包含：沙拉或汤”
  - “招聘要求：熟练掌握**Python或Java**”

晶体管

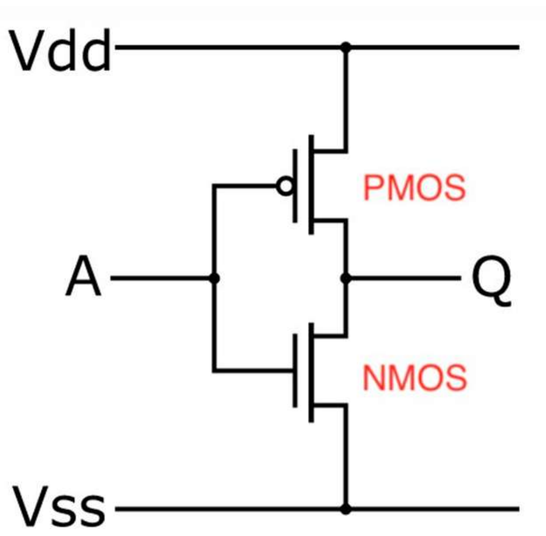
- **CMOS：** Complementary Metal-Oxide-Semiconductor(互补金属氧化物半导体)
  - **PMOS：** positive channel Metal Oxide Semiconductor
  - **NMOS：** negative channel Metal Oxide Semiconductor



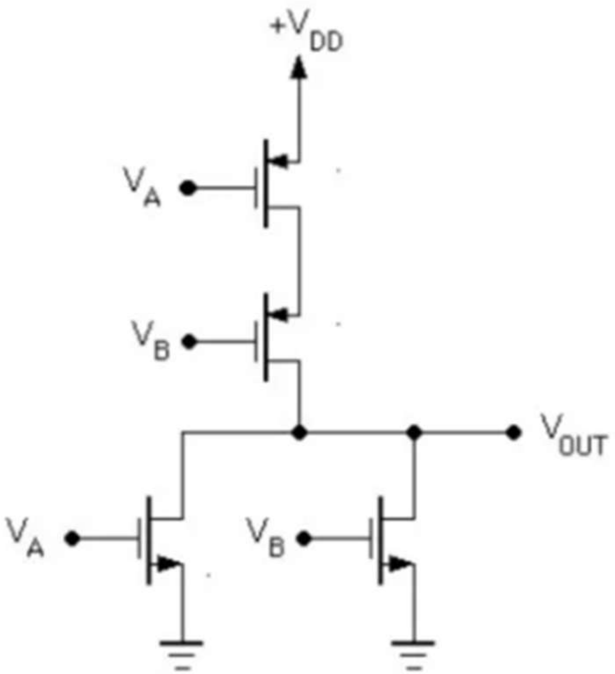
元件类型	物理特性	逻辑行为	对应逻辑概念
NMOS	高电平导通 **Gate=1，On**	if Input == 1 then Conduct	正逻辑开关 **Active High**
PMOS	低电平导通 **Gate=0，On**	if Input == 0 then Conduct	负逻辑开关 **Active Low**

VLSI芯片

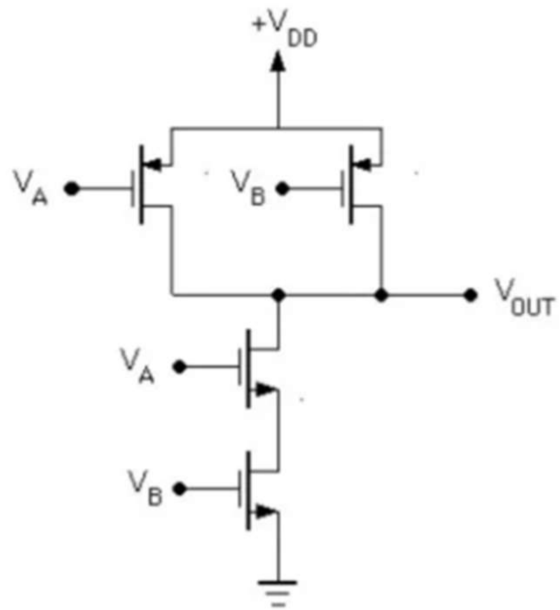
- **VLSI**: very-large-scale integration，超大规模集成电路



非门(反相器)



或非门



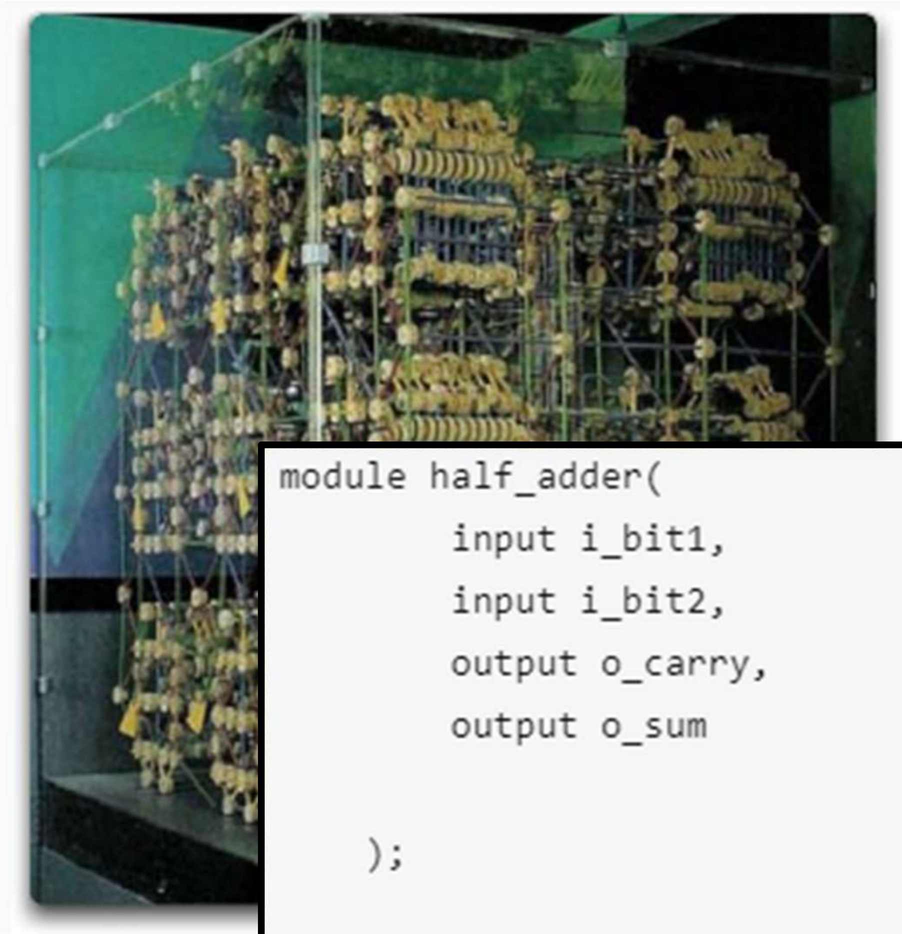
与非门

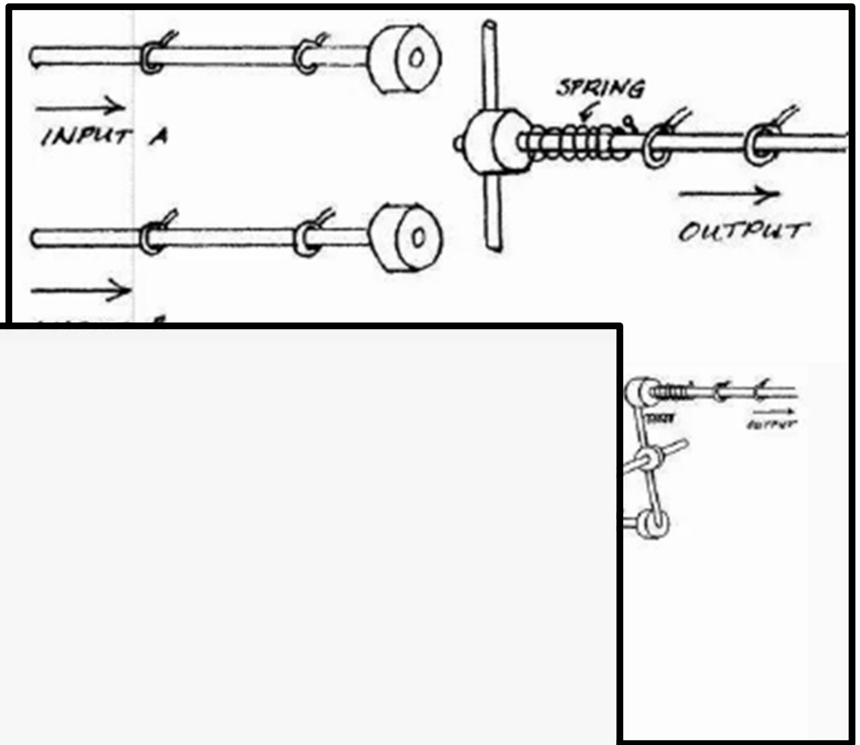
VLSI芯片

- VLSI: very-large-scale integration，超大规模集成电路

电路结构	晶体管排列	对应逻辑连接词
Inverter	1 NMOS / 1 PMOS	否定 **NOT**
NAND Gate	NMOS 串联 / PMOS 并联	与非 **NAND**
NOR Gate	NMOS 并联 / PMOS 串联	或非 **NOR**
AND Gate	NAND Gate + Inverter	合取 **AND**
OR Gate	NOR Gate + Inverter	析取 **OR**

集成电路与命题逻辑






```
module half_adder(
        input i_bit1,
        input i_bit2,
        output o_carry,
        output o_sum

    );

        assign o_carry = i_bit1 & i_bit2; //bitwise and
        assign o_sum = i_bit1 ^ i_bit2;   //bitwise xor

endmodule
```

逻辑连接符的表示形式

- **真值函数：** 用于描述逻辑连接词的语义的，定义在真值集合上的函数，用H*表示(*为对应的逻辑连接词)
- **真值表：** 描述逻辑连接词真值函数的映射情况

- $H_\neg$，$H_\wedge$，$H_\vee$，$H_\rightarrow$ 定义如下：

P	Q	$H_\neg(P)$	$H_\wedge(P,Q)$	$H_\vee(P,Q)$	$H_\rightarrow(P,Q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T

秦老师：如果按时缴纳了平时和期中作业，那么一定不会挂科

命题

- 一个命题是一个满足下列要求的表达式：
  - 命题仅由简单命题、连接词和括号组成。
  - 命题的构造过程中有穷次地使用了以下两条规则：
    - 一个简单命题是一个命题。
    - 如果P和Q是命题，则(¬P)， (P∧Q)， (P∨Q)， (P→Q)， (P↔Q)也是命题。

Part2- 命题的真值

简单命题的赋值

- 简单命题$\{p_1, \ldots, p_n\}$ 的一个赋值 (assignment) 是函数 $\sigma: \{p_1, \ldots, p_n\} \rightarrow \mathbb{T}$。
  - $\sigma(p_i)$表示σ下变量p_i的值，$i = 1, \ldots, n$。

命题的真值函数

- 设P为一个命题，P中的简单命题为$\{p_1,\ldots,p_n\}$的一个子集。P的真值函数$[\![P]\!]:\mathbb{T}^n\rightarrow\mathbb{T}$归纳定义如下：
  - 如果P是一个简单命题p_1，对$\{p_1,\ldots,p_n\}$的任意赋值$(\sigma(p_1),\ldots,\sigma(p_n))\in\mathbb{T}^n$，
    $[\![P]\!](\sigma(p_1),\ldots,\sigma(p_n))=\sigma(p_1)$，即P的真值等于$p_1$的赋值$\sigma(p_1)$。
  - 假设P_1和P_2为命题：
    - 简单命题都包含在$\{p_1,\ldots,p_n\}$中
    - 两者的真值函数$[\![P_1]\!]:\mathbb{T}^n\rightarrow\mathbb{T}$和$[\![P_2]\!]:\mathbb{T}^n\rightarrow\mathbb{T}$已经定义
    - P为下面五种命题之一：
      $(\neg P_1)$，$(P_1\wedge P_2)$，$(P_1\vee P_2)$，$(P_1\rightarrow P_2)$，$(P_1\leftrightarrow P_2)$
    - $[\![P]\!]=H^*([\![P_1]\!],[\![P_2]\!])$，$*$对应为P的命题。

真值表

- 一个包含n个简单命题的命题P的真值函数需要考虑有 2^n 个不同的赋值情况。

- P 的真值表：
  - 共有 $n + 1$ 列：其中前 n 列分别对应 P 中各个简单命题，最后一列对应命题 P。
  - 共有 $2^n + 1$ 行：
    - 第一行为表头，该行中前 n 列分别标出相应的简单命题，最后一列标出命题 P。
    - 其余各行分别为简单命题不同的赋值和相应的 P的值。

真值表

- 一个包含 n 个简单命题的命题 P 的真值函数需要考虑有 2^n 个不同的赋值情况。

- P 的 真值表 (truth table)：

p	q	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg q \rightarrow p$	$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	F	F	T

可满足，重言式，矛盾式

- **可满足(Satisfiable)**：如果存在P中简单命题的一个赋值满足P，则称P可满足。
  - 严格地，P可满足当且仅当存在P中简单命题的赋值σ使得：**⟦P⟧(σ)=T**。
- **重言式(Tautology)**：如果P中简单命题的所有赋值都满足P，则称P为重言式。
  - 严格地，P是重言式当且仅当对于P中简单命题的任意赋值σ都有：**⟦P⟧(σ)=T**。
- **矛盾式(Contradiction)**：如果不存在P中简单命题的赋值满足P，则称P为矛盾式。
  - 严格地，P是矛盾式当且仅当对于P中简单命题的任意赋值σ都有：**⟦P⟧(σ)=F**。

Part3- 命题之间的关系

连接词的优先级

- 我们规定连接词的优先级**由高到低**依次为：
  - $\neg$ (否定)
  - $\wedge$ (合取)
  - $\vee$ (析取)
  - $\rightarrow$ (蕴含)
  - $\leftrightarrow$ (双向蕴含)

逻辑蕴含与逻辑等价

- 逻辑等价(Logical Equivalence)：如果(P↔Q)为重言式，则称P和Q逻辑等价。
  - 通常用⇔，≡或≅表示
  - 逻辑等价是一种等价关系。
  - 逻辑等价是(F，¬,∧，∨,→,↔)上的一个同余关系，其中F为全体命题的集合。

- 逻辑蕴涵(Logical Implication)：如果(P→Q)为重言式，则称P逻辑蕴涵Q，也说Q是P的逻辑蕴涵。
  - 通常用⟹表示
  - 逻辑蕴含是一种偏序关系。

替换

- $P[Q/p]$表示把命题P中简单命题p的所有出现统一替换为命题Q得到的命题。
    - 一般地，对$n>0$，$P[P_1/p_1,\ldots,P_n/p_n]$表示将$P$中简单命题$p_1,\ldots,p_n$的所有出现同时分别替换为命题$P_1,\ldots,P_n$得到的命题。

- 例1：$((p\wedge q)\rightarrow p)[((r\wedge s)\rightarrow t)/p]$为

  $(((r\wedge s)\rightarrow t)\wedge q)\rightarrow((r\wedge s)\rightarrow t)$

- 例2：$((p\wedge q)\rightarrow p)[((r\wedge s)\rightarrow t)/p,(p\rightarrow q)/q]$为

  $(((r\wedge s)\rightarrow t)\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow((r\wedge s)\rightarrow t)$

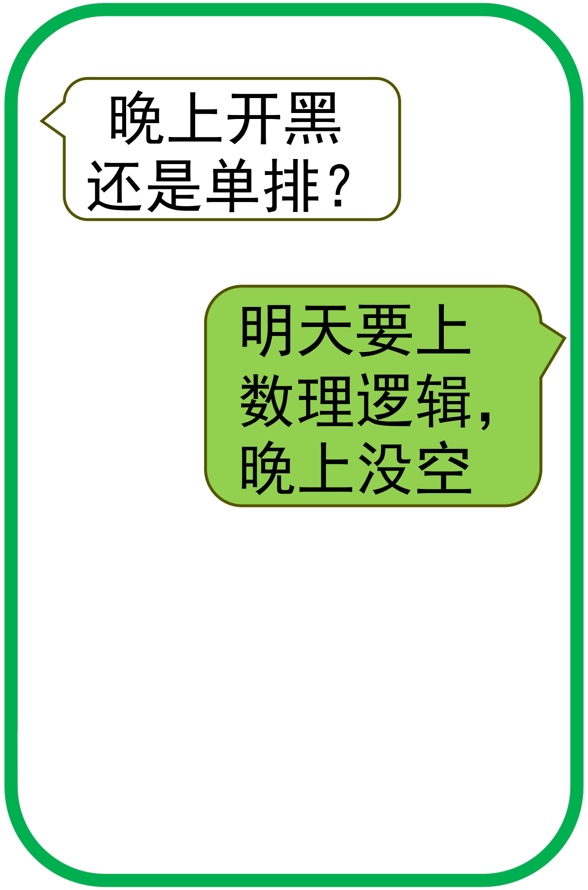
重言式替换定理

- 设P和$P_1, \dots, P_n$为任意n+1个命题。如果P是重言式，则$P[P_1/p_1, \dots, P_n/p_n]$也是重言式。

- 证明：
  - 若$P[P_1/p_1, \dots, P_n/p_n]$不是重言式，必定存在其中简单命题的某个赋值σ使得该断言的值为假。即：$[\![P[P_1/p_1, \dots, P_n/p_n]]\!](\sigma)=F$。
  - σ同时也是$P_1, \dots, P_n$的赋值。基于σ，一个新的赋值σ'如下：对$i=1, \dots, n$，统一地令$\sigma'(p_i)=[\![P_i]\!](\sigma)$。对于其他简单命题p，则令$\sigma'(p)=\sigma(p)$。
  - 对P中连接词的个数做归纳，可以证明：$[\![P]\!](\sigma')=[\![P[P_1/p_1, \dots, P_n/p_n]]\!](\sigma)=F$，则与P是重言式矛盾。故原定理可证。□

德摩根定律 (De Morgan's Law)

- 对任意的命题 P 和 Q 有：
  - $(\neg(P \wedge Q))$ 与 $((\neg P) \vee (\neg Q))$ 逻辑等价；
  - $(\neg(P \vee Q))$ 与 $((\neg P) \wedge (\neg Q))$ 逻辑等价。



等价替换定理

- 假设命题P_1中包含了命题P。将P_1中P的一个或多个出现用命题Q替换而得到Q_1。如果P和Q逻辑等价，则P_1和Q_1逻辑等价。

结构归纳法初探

① 归纳基础(Induction Basis)： 证明命题对每一种原子结构成立。

- 在命题逻辑中，原子结构通常指单独的简单命题

② 归纳假设(Induction Hypothesis)： 假设命题对结构P、Q等成立。

③ 归纳证明(Induction Step)： 根据归纳假设证明命题对由P、Q等出发，通过使用一次构造规则而得到的新的结构P_1成立。

- 在命题逻辑中，构造规则指使用¬,∧,∨,→等连接词将P,Q组合起来

细胞学说

- 归纳基础：胡克和列文虎克发现了单细胞
  - 罗伯特·胡克观察到软木塞的细胞壁
  - 列文虎克观察到活体单细胞微生物
- 归纳假设：施莱登和施旺观察植物体和动物体
  - 施莱登观察到植物的茎、叶、根，都是由细胞构成
  - 施旺确认了动物体同样普遍由细胞构成
- 归纳证明：耐格里和魏尔总结出“细胞分裂”
  - 细胞绝不可能从无生命的物质中自然发生
  - 新的细胞只能通过已有细胞的分裂与增殖来产生

逻辑蕴含的代数结构

- $((F, \preceq), \neg, \wedge, \vee)$ 是一个抽象布尔代数，其中：
  - F代表命题的集合。
  - $\preceq$即逻辑蕴涵关系。如果P逻辑蕴涵Q，记作$P \preceq Q$。

- 在这个代数结构中：
  - 极小元是矛盾式。
  - 极大元是重言式。
  - P和Q的上确界是$P \vee Q$。
  - P和Q的下确界是$P \wedge Q$。
  - P的补元是$\neg P$。

逻辑连接符的单调性

- 合取 (∧) 与析取 (∨) 具有单调性：
  - 如果子命题变强(或变弱)，整体命题也随之同向变化。
- 否定 (¬) 具有反单调性：
  - 如果子命题运算变强，整体命题反而变弱。
- 蕴涵 (→)：
  - 对第二个运算对象Q：具有单调性。
  - 对第一个运算对象P：具有反单调性。

逻辑蕴含替换定理

- 设P是一个合式命题，且其中不出现运算符↔。存在对P的每个子命题的一套正负标记，使得P对其每个子公式具有替换的单调性。
  - 正标记：如果子命题Q出现在P的“正”位置，且Q_1逻辑蕴涵Q_2，则$P[Q_1/Q]$逻辑蕴涵$P[Q_2/Q]$。
  - 负标记：如果命题Q出现在P的“负”位置，且Q_1逻辑蕴涵Q_2，则$P[Q_2/Q]$逻辑蕴涵$P[Q_1/Q]$。

逻辑蕴含的替换

- $P \rightarrow Q$： 如果代码正确，则程序正常运行 。
  - Q1: 程序在5min内运行结束。
  - Q2: 系统在10min内运行结束。
  - $Q1 \Rightarrow Q2$

- 替换结果：
  - $(P \rightarrow Q1) \Rightarrow (P \rightarrow Q2)$
  - 如果代码正确使得程序能够在5min内运行结束，那么代码正确使得程序能够在10min内运行结束。

逻辑蕴含的替换

- P →Q： 如果输入小于0的数，则程序崩溃。
  - P1: 输入小于-2,147,483,648的数。
  - P2: 输入小于-32768的数。
  - P1⇒P2

- 替换结果：
  - (P2 → Q) ⇒ (P1 → Q)
  - 如果输入小于-32768的数使得程序崩溃，那么输入小于-2,147,483,648的数会使得程序崩溃。

Part4- 推理的有效形式

分离规则 Modus Ponens

- 如果P和P→Q都是重言式，那么Q也是重言式。
- 证明：
  - 假设P和 (P→Q) 是重言式，但是Q不是重言式。
  - 再设 (P→Q) 中的简单命题为$\{p_1, \ldots, p_n\}$。由于Q不是重言式，根据定义，存在上述变量的一个赋值σ使得：⟦Q⟧(σ) = F。因为 (P→Q) 是重言式，所以⟦P→Q⟧(σ) = T ……(*)
  - 但另一方面，因为P是重言式，所以⟦P⟧(σ)=T，结合⟦Q⟧(σ) = F以及真值函数⟦P→Q⟧，⟦P→Q⟧(σ)=F ……(**)
  - 显然(*)和(**)矛盾，所以假设不成立，命题得证。

□

分离规则的由来

- Modus Ponendo Ponens
  - Modus： 模式/方法
  - Ponendo:通过肯定/通过断定
  - Ponens:进而肯定
- 直译：通过肯定来肯定的模式 The mode that affirms by affirming
- Modus Tollendo Tollens： 通过否定来否定的模式 The mode that denies by denying
  - 如果你是流感，那么你会发烧。你没有发烧，所以你不是流感。
  - 如果你是流感，那么你会发烧。你发烧了，所以你是流感？

关于分离规则

- 斯多葛学派最早形式化了命题逻辑。他们明确了“如果...那么...”的条件命题形式。
  - 假言肯定 (Modus Ponens)：如果是白天，那么就有光；现在是白天；所以有光。
  - 假言否定 (Modus Tollens)：如果是白天，那么就有光；现在没有光；所以不是白天。
  - 合取否定 (Modus Ponendo Tollens I)：不可能即使白天又是黑夜；现在是白天，所以不是黑夜。
  - 析取肯定 (Modus Ponendo Tollens II)：要么是白天，要么是黑夜；现在是白天；所以不是黑夜。
  - 析取否定 (Modus Tollens Ponens)：要么是白天，要么是黑夜；现在不是白天，所以是黑夜。

关于分离规则

- 罗素在数学巨著《数学原理》指出，“分离规则是整个逻辑系统中唯一的一条推理规则。它像引擎一样，驱动着有限的公理推导出整个数学大厦。”

- 希尔伯特推理系统中唯一的一条推理规则

- 刘易斯·卡罗尔悖论(Lewis Carroll's Paradox)
  - “规则”不等于“公理”

推理的有效形式

- 推理形式是形式如下的命题序列：$P_1, \ldots, P_n;\ \therefore P$
  - 如果存在对所有简单命题的一个赋值，使得前提 $P_1, \ldots, P_n$ 的值都为 T，而结论 P 的值为 F，则该推理形式是无效的。
  - 如果不存在上述反例，则该推理形式是有效的。

- 一个推理形式 $P_1, \ldots, P_n;\ \therefore P$ 是有效的，当且仅当命题 $(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow P$ 是重言式。