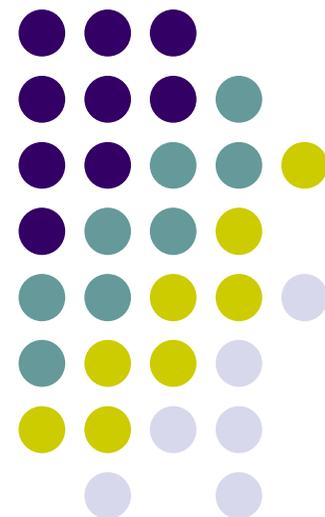




南京大學

数理逻辑

主讲人：秦逸



自我介绍



- 姓名： 秦逸
 - 电子邮件： yiqinics@nju.edu.cn
 - 办公室： 计算机系楼501
 - Office Hour: 每周二15:00 ~ 16:00



南京大學

主要内容

- **朴素概念中的逻辑**
 - 朴素的命题逻辑与谓词逻辑
- **数学系统中的逻辑**
 - 形式化命题逻辑与一阶语言
 - 形式化推理系统及其性质
 - 一阶语言的重要定理
 - 哥德尔不完备性定理
- **软件系统实践中的逻辑**
 - 交互式证明器coq
 - 模态逻辑与模型检验

课程组成

朴素概念中的逻辑

数学系统中的逻辑

软件系统实践中的逻辑



南京大學

- **第一讲 朴素命题逻辑**
- **第二讲 形式化命题逻辑**
- **第三讲 形式化推理系统**
- **第四讲 coq入门**
- **第五讲 朴素谓词逻辑**
- **第六讲 一阶语言**
- **第七讲 G系统**
- **第八讲 推理系统的可靠性与完全性定理**
- **第九讲 coq的高阶特性**
- **第十讲 coq的逻辑系统**
- **第十一讲 一阶语言的重要定理**
- **第十二讲 模型检验概述**
- **第十三讲 哥德尔不完备性定理**



南京大學

课程相关资源

- 课程教学网站：
 - <https://yiqinnju.github.io/course/MathLogic/MathLogic.html>
 - 发布讲义、通知、以及课程规则
- 课程邮箱：mathlogicnju@163.com
 - 用于提交作业



南京大學

参考书目

- **《数理逻辑十二讲》**（宋方敏等编著，机械工业出版社）是本课程的传统教材，主要从纯粹的数学视角出发，介绍了数理逻辑的基础理论与重要定理
- **《数理逻辑引论——计算机科学与系统的天然基础》**（刘志明等编著，科学出版社）从计算机科学的视角阐述了数理逻辑的基本概念
- **《Software Foundations》第一卷《Logic Foundations》**（Benjamin C. Pierce等著）从计算机软件的角度介绍了Coq推理证明器



南京大學

Part1 - 什么是逻辑



中国古代的逻辑

- 墨家·墨辩
 - 世界**三大古典逻辑(?)**体系之一
 - 三表说 -> 三物论

墨辩	三段论	因明学三支作法
孔子必有死。 因孔子是人。	凡人皆有死。 孔子是一个人。 故孔子必有死。	孔子必有死。 因孔子是一个人。 凡人皆有死，例如舜。

- 名家·公孙龙
 - **白马非马**：概念集合的相等和包含
 - **离坚白**：物体和物体属性的联系

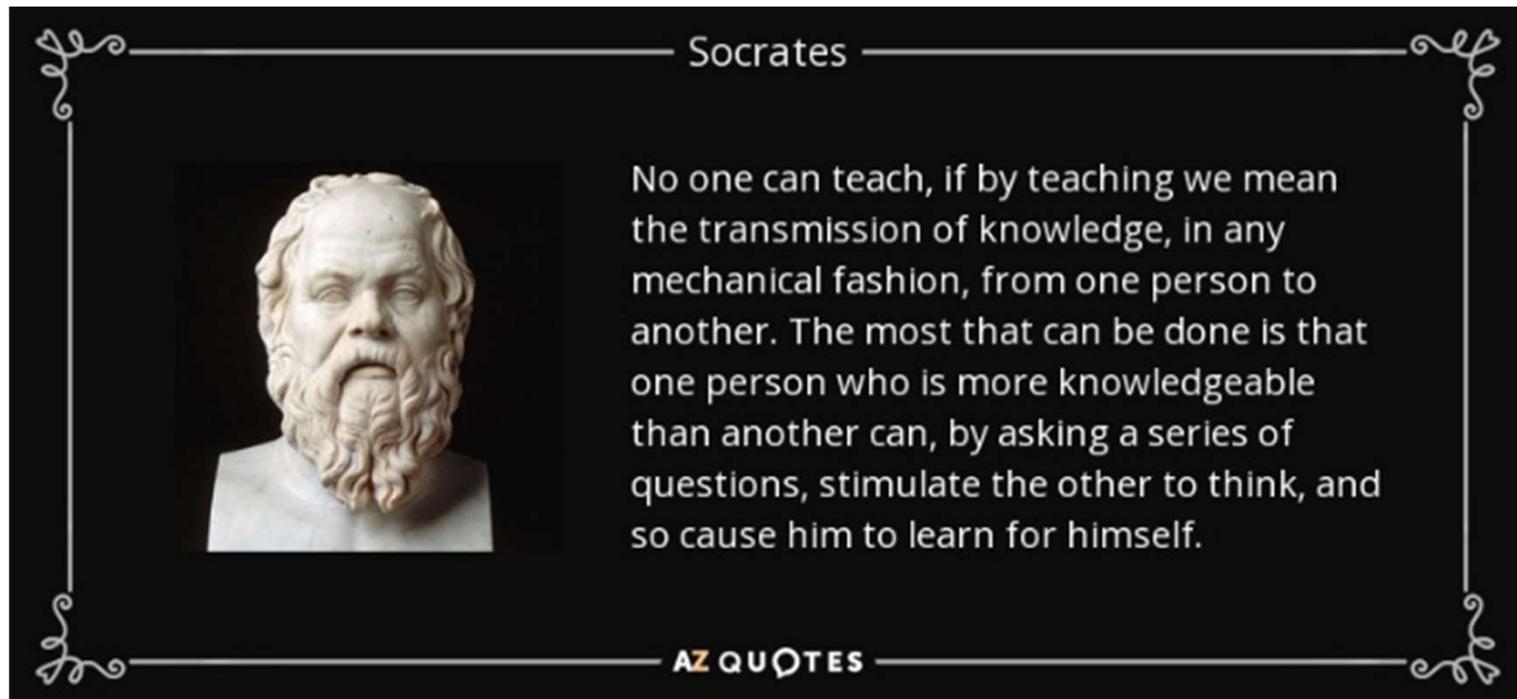




南京大學

苏格拉底

- 西方哲学的祖宗
- 辩证法（苏格拉底教学法）

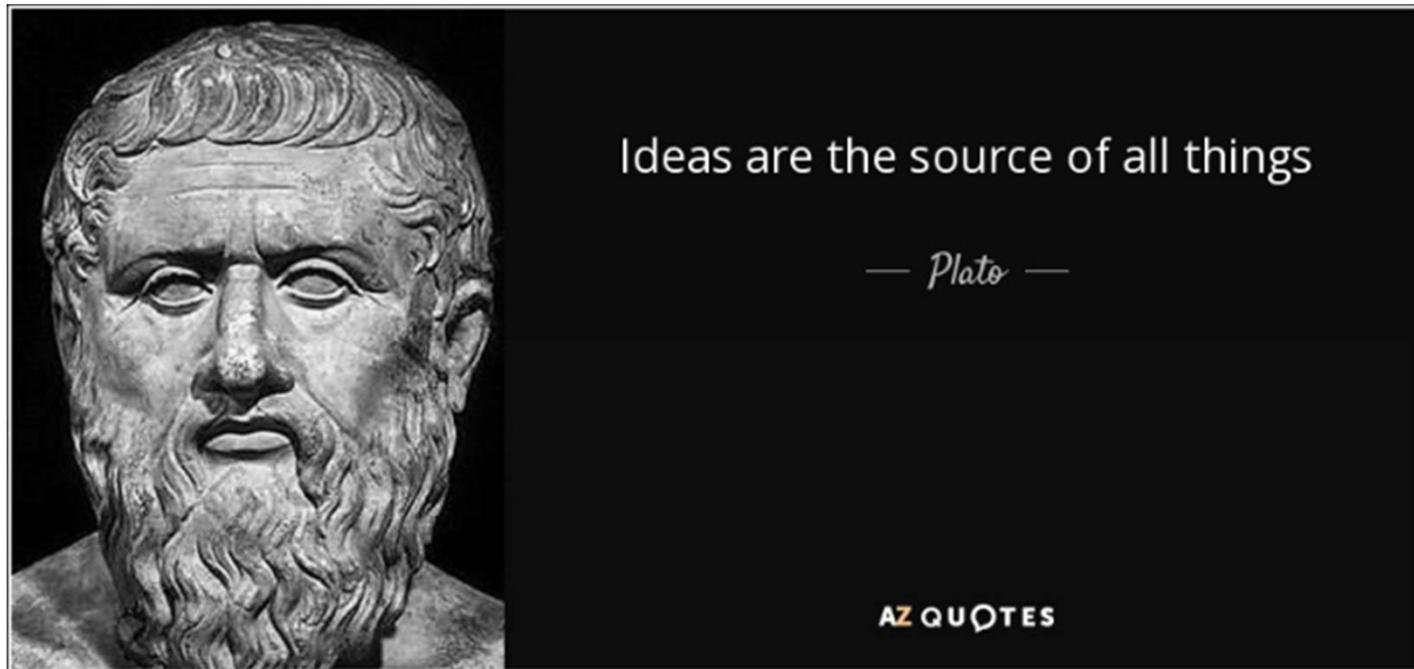




南京大學

柏拉图

- 创办了学院 Ἐκαδήμεια (Hekademia)
 - 英文“Academy”的词源
- 柏拉图主义：真正存在的是理念，是永恒、不变、完美的东西

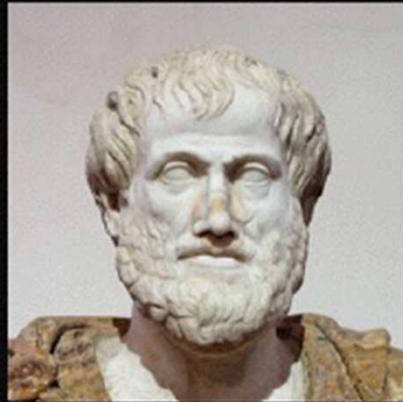




南京大學

亚里士多德

- 17岁进入学院
- 兴趣广泛，建立了包含道德、美学、逻辑和科学、政治和形上学的哲学系统



Plato is my friend, but truth is a better friend.

~ Aristotle

但是...



南京大學



Plato is my friend, Aristotle is
my friend, but my greatest
friend is truth.

~ Isaac Newton

AZ QUOTES



南京大學

又但是...



Emm...



南京大學

“

*Wer mit Ungeheuern kämpft, mag zusehn, dass er
nicht dabei zum Ungeheuer wird.*

*Und wenn du lange in einen Abgrund blickst, blickt der
Abgrund auch in dich hinein.*

**与恶龙缠斗过久，自身亦成为恶龙；
凝视深渊过久，深渊将回以凝视。**

”

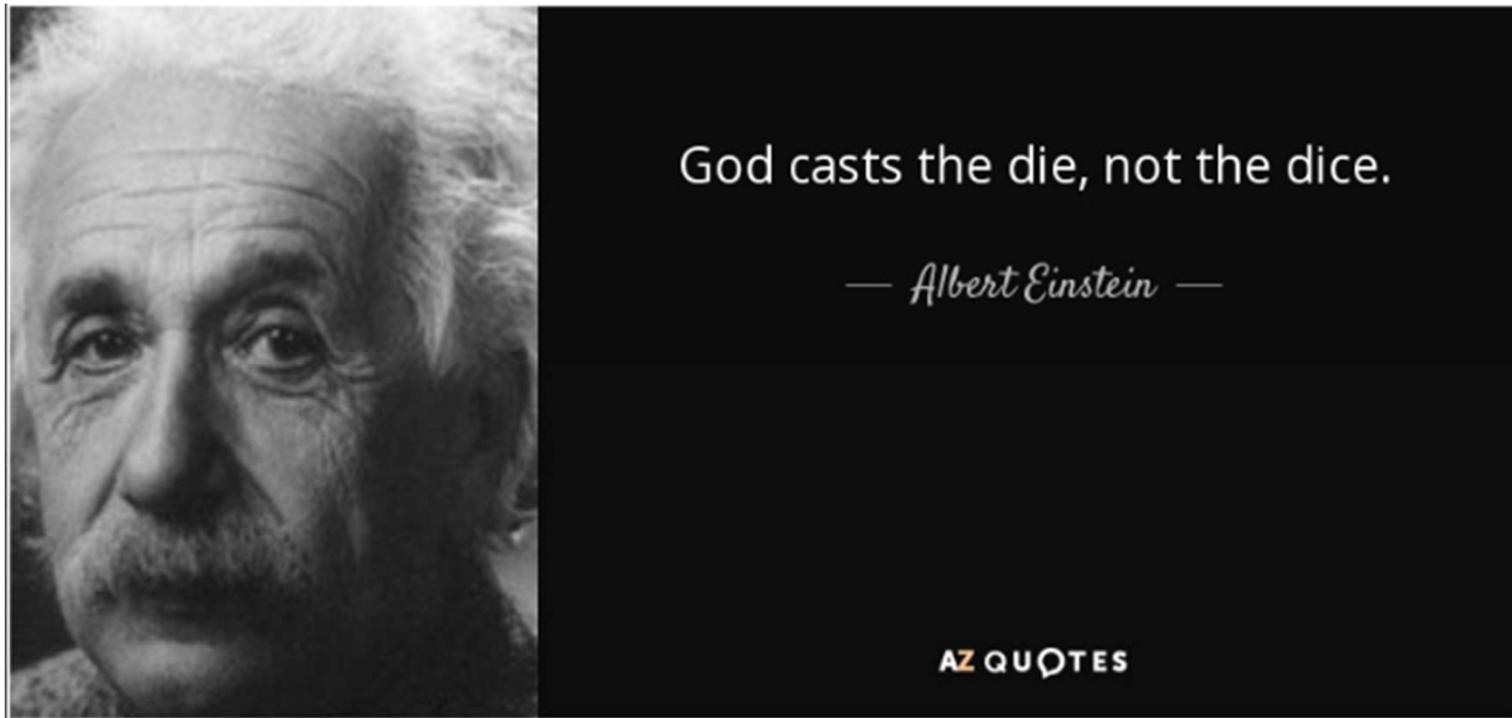
——Friedrich Wilhelm Nietzsche

弗里德里希·威廉·尼采，《善恶的彼岸》第四章 箴言和间奏曲

The conclusion



南京大學





南京大學

超越真理

- 亚里士多德在编柏拉图学园的对话游戏的手册时注意到有些问题只能有特定的答案：

问：是不是所有人人都是会死的？

答：是

问：苏格拉底是不是人人？

答：是

问：苏格拉底是不是会死？

答：呃…



南京大學

亚里士多德的三段论

- 大前提：所有人都是动物
- 小前提：所有逻辑学家都是人
- 结论：所有逻辑学家都是动物



南京大學

亚里士多德的三段论

- 大前提：所有A都是B
- 小前提：所有C都是A
- 结论：所有C都是B



南京大學

亚里士多德的三段论

- 大前提：所有A都是B
- 小前提：有些A是C
- 结论：有些C都是B



南京大學

Oops...

- 大前提：所有A都是B
- 小前提：有些C是B
- 结论：有些C都是A
- 所有逻辑学家都会死，有些兔子会死，推不出：有些兔子是逻辑学家。



亚里士多德的三段论

- 语言：
 - "所有A是B"
 - "没有A是B"
 - "有些A是B"
 - "有些A不是B"
- 本质上通过这个模板生成：所有/有些 A 是/不是 B
- 结构：大前提(M, P), 小前提(S, M), 结论(S, P)
- 可能的（不等价）形式256个
 - 4个基本自明的“perfect”三段论
 - 一些转换规则从四个基本的推出所有24个有效的



亚里士多德的三段论

- 扬·卢卡西维茨
 - 《亚里士多德的三段论》
 - 19个有效论式子，结论弱化的5个论式
 - “波兰表示法” 和 “逆波兰表示法”



	aaa(Barbara)	eae(Celarent)	aīī(Darii) --	eīo (Ferio)
大前提	所有M是P	没有M是P	所有M是P	没有M是P
小前提	所有S是M	所有S是M	有些S是M	有些S是M
结论	所有S是P	没有S是P	有些S是P	有些S不是P

WHY ?



南京大學

破題	散行（2句）	简单点破题意，不加解释。
		承接破題 略徵引由和道明題

破題：士之行也，必以有耻为大；而耻之存也，则所以为行之本。

承題：苟无愧怍之心，其行必苟且；苟其有耻也，则其行必端重。故君子之自修，亦惟此心存之耳。

起讲：夫行者，践履之实；耻者，人之大闲。是故士之立志，必先有耻，而后其行乃可言也。

入手：彼汲汲于利禄者，孰知有耻之为贵乎？

起股：夫何谓之耻？器具之属，皆有定制，其形既具，则其用已专。
夫何谓之君子？道德之身，不泥一隅，其体既全，则其用无方。

中股：所以有耻者，以其道也。道体无涯，故其发为事业，则充塞乎天地。
所以有耻者，以其德也。德行广大，故其应乎事物，则变通而无穷。

后股：若徒执于一善，安能应万变之会？必也大其心，广其量，而后可以为天下之用。
若但守于一能，何以称万事之需？必也博其学，充其气，而后可以为一代之雄。

束股：然则行己之要，在于知耻，知耻则百行皆立。斯乃圣人教人，以立身之大本也。
然则为学之功，在于养耻，养耻则万善可图。斯乃君子自修，以成德之妙用也。

大结：故君子曰慎一日，兢兢业业，非他，惟恐失此有耻之心耳。

束股	对偶排比（双股）	总结收束全篇，回应主题。
----	----------	--------------



结构要素	法学称谓	内容（命题）	逻辑模式
大前提	刑法通则	所有已着手实施犯罪但因意志以外原因未得逞的行为（M），都构成犯罪未遂（P）。	A（全称肯定）
小前提	案件事实	K意图杀人，但因他人影响（S）的行为，是已着手实施犯罪但因意志以外原因未得逞的行为（M）。	A（全称肯定）
结论 (Intermediate Conclusion A)	初步涵摄	K的行为（S）构成了犯罪未遂（P）。	A（全称肯定）

Synonym 2: 构成要件行为是故意伤害未遂

结构要素	法学称谓	内容（命题）	逻辑模式
大前提	罪名排除规范	没有不构成犯罪未遂的对他人生命财产构成实质威胁的行为（M'）不应以故意伤害罪（未遂）论处（P'）。	E（全称否定）
小前提	行为性质	K的行为（S'）是对他人生命财产构成实质威胁的行为（M'）。	A（全称肯定）
结论 (Final Conclusion)	最终定性	所以，K的行为（S'）应以故意伤害罪（未遂）论处（P'）。	E（全称否定）

一级结构	二级标题	内容细化与写作要点	效果目标
虎头(开头)	1. 快速切入 (引论)	概括材料、引用名言、设置情境、提出疑问等。要求在 3 行内完成。	迅速锁定话题范围。
	2. 核心界定 (析题)	对作文题目中的关键词进行简短解释或价值判断，展现思辨性。	展现对题目深度的理解。
	3. 观点亮剑 (立论)	用一句简洁、有力、有深度的判断句表达全文的中心论点。放在段末。	让阅卷者一眼看到你的核心观点。
猪肚(主体)	4. 论点统领 (分论点提出)	每段开头第一句话，必须是简洁有力的分论点，与中心论点构成支撑关系。	使论证结构一目了然。
	5. 论据支撑 (材料运用)	至少使用 1 个经典论据（历史、时事、文学）。论据要与论点有逻辑关联，避免堆砌。	用事实说话，增强说服力。
	6. 深度说理 (分析议论)	必须深入分析论据，即解释“为什么论据能证明论点”，而不是简单复述故事。这是议论文的灵魂。	展现由事及理的思维过程。
	7. 层次推进 (过渡衔接)	确保三个分论点（个体、社会、辩证）之间有逻辑关联词（如“不仅如此”、“更进一步”）进行过渡和衔接。	形成环环相扣的逻辑链条。
豹尾(结尾)	8. 观点回归 (回扣)	换一种措辞，再次强调中心论点。呼应开头（可以重复开头的核心意象）。	文章首尾呼应，形成闭环。
	9. 思想升华 (展望/总结)	拔高立意，将论题上升到更宏大、更有远见的层面（如时代责任、人类命运、历史潮流）。	留下深刻思考，提高文章立意分。



南京大學

Part2- 什么是数理逻辑



南京大學

数理逻辑

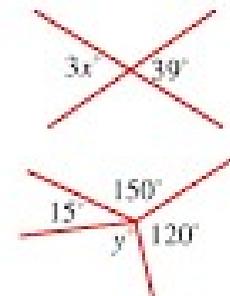
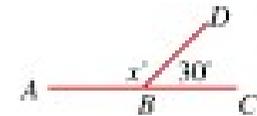
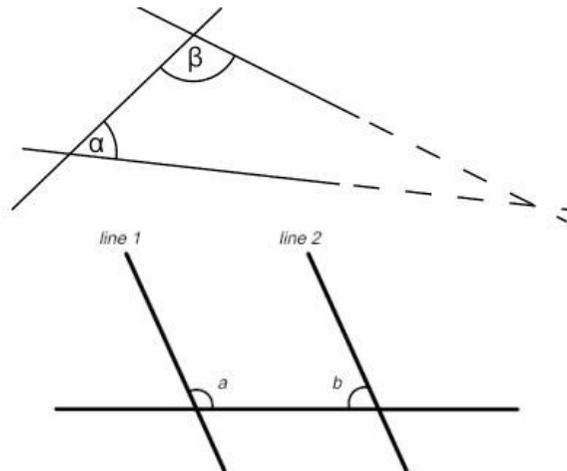
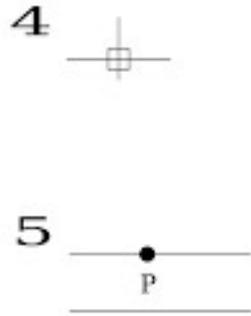
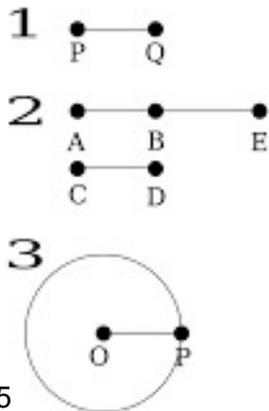
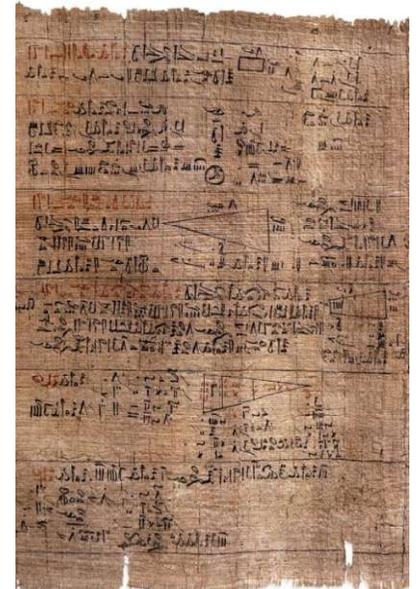
- 逻辑的目标：可验证的推理过程
- 数理逻辑的目标：纯粹语法制导的推理过程
 - **Well-defined**: 正确的语法
 - **Verifiability**: 可验证的推理过程
 - **Soundness**: 推理过程的可靠性
 - **Consistency**: 推理理论的协调性
 - **Completeness**: 推理能力的完全性



南京大學

古典几何

- 古埃及文明
 - 如何在尼罗河泛滥期间保持原有的土地边界
 - geo(地球) + metry (测量)
- 欧几里得
 - Στοιχεῖα, *Stoicheia*, 几何原本
 - **定义+公理 (公设) + 定理**的理论体系

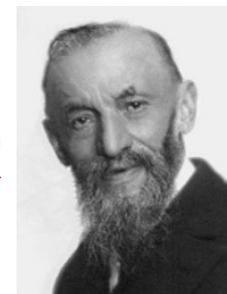
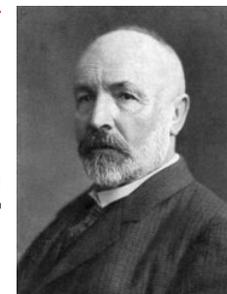
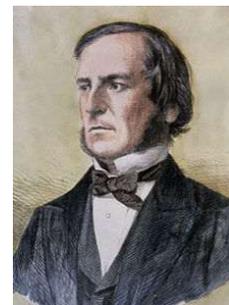


近代逻辑

- **伽罗华**：开创研究抽象的公理化代数系统的**抽象代数**（1832）
- **布尔**：建立描述人类思维代数规律的**布尔代数**（1847-1854）
- **康托**：建立**集合论**，可用于表达整个数学的形式语言（1872-1874）
- **弗雷格**：严格建立第一个人工形式语言**概念文字**（1879）
- **皮亚诺**：建立算术的形式语言**皮亚诺算术**（1889）
- **策梅洛**：建立第一个公理化集合论**策梅洛集合论**（1908）



南京大學





近现代逻辑

- **罗素：《数学原理》** (1910-1913)
 - 表述所有数学真理在一组数理逻辑内的公理和推理规则下，原则上都是可以证明的
- **希尔伯特：《几何基础》，《数学基础》**，建立几何和数学的形式语言
 - 希尔伯特的23问 (1900)
- **哥德尔：哥德尔完全性定理** (1929) **哥德尔不完备定理** (1931)
 - **一阶逻辑的完全性** (Hilbert 1928)
 - **算术公理的相容性** (P2)





京大



现代逻辑

- **邱奇**：什么是可计算的（1932）
 - 基于**λ演算**定义的可计算函数
- **图灵**：可计算模型间的关系（1936）
 - **图灵机**计算模型
 - **Church-Turing thesis**：任何可以在人类认知中被有效地计算（或程序化）的功能，都可以被图灵机计算。
- **科恩**：**数学公理的独立性**（1963）
 - **连续统假设（CH）**与ZFC公理系统的独立性（P1）



南京大學

数理逻辑与计算机科学

- **数理逻辑的研究孕育了计算机科学...**
 - 1928年，希尔伯特提出**判定性问题**：
 - 求一个算法，输入一个形式语言及其描述的一个数学陈述，输出对该陈述的正确判定
 - 1936年，图灵提出**图灵机**
 - 1937年，邱奇-图灵问题，**可计算性**
 - 1940年代，冯诺依曼提出**存储程序计算机结构**
 - 1946年2月14日，第一台图灵完全的电子计算机**ENIAC**正式公布



南京大學

数理逻辑与计算机科学

- 对编程语言的影响：
 - 函数式编程语言 Lisp, Haskell, **Gallina**
 - 声明式编程语言 Prolog, Datalog
 - 关系数据库查询语言SQL
- 对计算机软件的影响
 - 关系代数：现代数据库, E. Codd, 1981年图灵奖
 - 时序逻辑：程序验证, A. Pnueli, 1996年图灵奖
 - 逻辑时钟：现代分布式系统, L.Lamport, 2013年图灵奖
 - 模型检验：工程化系统验证, E.Clarke, E.Emerson, J.Sifakis, 2007年图灵奖