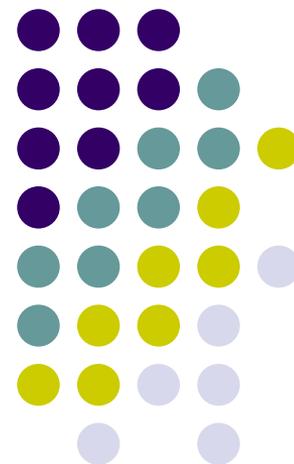




第8讲 - 命题逻辑的 永真推理系统





内容概要

公理 | 规则 | 一些定理

与 G' 的等价定理



简介

- 本章介绍命题逻辑的永真推理系统；
- 由于在推理过程中出现的所有命题皆为永真，故称这样风格的系统为永真推理系统，亦称其为Hilbert型系统；
- 我们先给出一个永真推理系统 H ，然后证明 H 与 G' 在某种意义下是等价的。



公理

- A01 $A \rightarrow A$
- A02 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
- A03 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- A04 $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- A05 $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$
- A06 $(\neg\neg A) \rightarrow A$
- A07 $(A \wedge B) \rightarrow A$
- A08 $(A \wedge B) \rightarrow B$
- A09 $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
- A10 $A \rightarrow (A \vee B)$
- A11 $B \rightarrow (A \vee B)$
- A12 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

以上 $A, B, C \in PROP$, A01 – A12被称为公理模式(schema), 呈形以上公理模式的命题被称为公理。



规则

$$MP \quad \frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

- 规则 MP 被称为分离规则，或肯定条件的推理规则（Modus Ponens）。
- 当实施 MP 时，我们称 B 由 $A \rightarrow B$ 和 A 实施 MP 而得，有时亦记为 $A \rightarrow B, A \vdash B$ 。
- 命题演算的永真推理系统有许多个，这里采用的系统由莫绍揆教授提出。



定义8.1 设 $A \in PROP, \Gamma \subseteq PROP,$

1. 在H中由 Γ 推导A (记为 $\Gamma \vdash_H A$) 指存在序列 P_1, \dots, P_n 使A为 P_n 且对任何 $i \leq n$ 有

或(a) P_i 为H的公理

或(b) $P_i \in \Gamma$

或(c) 存在 $j, k < i$ 使得 P_j 为 $P_k \rightarrow P_i,$

这时 P_i 由其前 P_j 和 P_k 实施MP而得。

当H唯一确定时, 我们将 $\Gamma \vdash_H A$ 简记为 $\Gamma \vdash A$ 。

2. 称以上的 P_1, \dots, P_n 为 $\Gamma \vdash A$ 的证明过程, n 为其证明长度。

3. 当 $\Gamma \vdash A$ 时, 我们称A为 Γ -定理;

当 Γ 为空时, 简记为 $\vdash A$, 称A为定理;

令 $Th(\Gamma) = \{A | \Gamma \vdash A\}$ 。



一些定理

$$T13 \quad (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$$

证明:

$$(1) \quad (C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)) \quad A03$$

$$(2) \quad (1) \rightarrow (3) \quad A02$$

$$(3) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)) \quad MP(2)(1)$$

(1),(2),(3)为证明过程。

□



$$T14 \quad (A \rightarrow B) \rightarrow ([D \rightarrow (C \rightarrow A)] \rightarrow [D \rightarrow (C \rightarrow B)])$$

证明:

$$(1) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)] \quad T13$$

(2)

$$[(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)] \rightarrow \underline{([D \rightarrow (C \rightarrow A)] \rightarrow [D \rightarrow (C \rightarrow B)])} \quad T13$$

$$(3) \quad (1) \rightarrow [(2) \rightarrow (4)] \quad A03$$

$$(4) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow \underline{\{[D \rightarrow (C \rightarrow A)] \rightarrow [D \rightarrow (C \rightarrow B)]\}}$$

$$MP(MP(3)(1))(2)$$





$T15 \quad \vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$

证明:

(1) $(A \wedge B) \rightarrow A$ $A07$

(2)

$((A \wedge B) \rightarrow A) \rightarrow ([A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow A)])$
 $T14$

(3) $[A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow A)]$ $MP(2)(1)$

(4) $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ $A09$

(5) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ $MP(3)(4)$





$$T17 \quad \vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

证明:

$$(1) \quad \neg\neg A \rightarrow A \quad A06$$

$$(2) \quad (\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow \quad T14$$

$$\{[(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg\neg A)] \rightarrow \\ [(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)]\}$$

$$(3) \quad (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg\neg A) \quad A05$$

$$(4) \quad (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A) \quad MP(MP(2)(1))(3)$$





$T18 \quad \vdash A \rightarrow \neg\neg A$

证明:

(1) $\neg A \rightarrow \neg A$ $A01$

(2) $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg A)$ $A05$

(3) $A \rightarrow \neg\neg A$ $MP(2)(1)$

□



$$T19 \quad \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

证明:

$$(1) \quad B \rightarrow \neg\neg B \quad T18$$

$$(2) \quad (B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg B)] \quad T13$$

$$(3) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg B) \quad MP(2)(1)$$

$$(4) \quad (A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad A05$$

$$(5) \quad (3) \rightarrow [(4) \rightarrow (6)] \quad A03$$

$$(6) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad MP(MP(5)(3))(4)$$

□



引理8.2

1. 若 A 为公理, 则 $\Gamma \vdash A$
2. 若 $A \in \Gamma$, 则 $\Gamma \vdash A$
3. 若 $\Gamma \vdash A$ 且 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, 则 $\Gamma \vdash B$
4. 若 $\Gamma \vdash A \rightarrow (A \rightarrow B)$, 则 $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$
5. 若 $\Gamma \vdash C \rightarrow (B \rightarrow A)$ 且 $\Gamma \vdash C \rightarrow B$, 则 $\Gamma \vdash C \rightarrow A$

证明(5):由T16知 $\Gamma \vdash [C \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow [(C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A)]$ 可证, 设它的证明过程为 P_1, \dots, P_l 。

$\Gamma \vdash C \rightarrow (B \rightarrow A)$ 与 $\Gamma \vdash C \rightarrow B$ 的证明过程分别为 Q_1, \dots, Q_m 和 R_1, \dots, R_n 。

从而 $\Gamma \vdash C \rightarrow A$ 的证明过程为

$P_1, \dots, P_l, Q_1, \dots, Q_m, R_1, \dots, R_n, (C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A), C \rightarrow A$.
故 $\Gamma \vdash C \rightarrow A$ 可证. □



推理定理

定理8.3 (推理定理). 若 $\Gamma, C \vdash A$, 则 $\Gamma \vdash C \rightarrow A$.

这里 Γ, C 为 $\Gamma \cup \{C\}$ 的简写.

证明: 设 $\Gamma, C \vdash A$, 对 $\Gamma, C \vdash A$ 的证明过程 A_1, \dots, A_n 的长度做归纳来证明 $\Gamma \vdash C \rightarrow A$.

情况1. A 为公理或 $A \in \Gamma$,

易见 $\Gamma \vdash A$, 又 $\Gamma \vdash A \rightarrow (C \rightarrow A)$ (T15)

从而由引理 8.2 3)知 $\Gamma \vdash C \rightarrow A$.

情况2. C 为 A , 从而 $\Gamma \vdash A \rightarrow A$, 即 $\Gamma \vdash C \rightarrow A$.

情况3. A_n 由 A_i, A_j 实施MP而得,

这里 $i, j < n$ 且 A_i 为 $A_j \rightarrow A_n$.

归纳假设: $\Gamma \vdash C \rightarrow A_i, \Gamma \vdash C \rightarrow A_j$.



以下分情况证明 $\Gamma \vdash C \rightarrow A_n$

子情况**3.1** A_j 为C.

因为 $\Gamma \vdash C \rightarrow A_i$, 且 A_i 为 $C \rightarrow A$,

从而 $\Gamma \vdash C \rightarrow (C \rightarrow A)$, 由引理8.2 4)知 $\Gamma \vdash C \rightarrow A$.

子情况**3.2** A_j 不为C. 因为 $\Gamma \vdash C \rightarrow A_i$, $\Gamma \vdash C \rightarrow A_j$

即 $\Gamma \vdash C \rightarrow (A_j \rightarrow A)$, 且 $\Gamma \vdash (C \rightarrow A_j)$, 从而

由引理8.2 5)知 $\Gamma \vdash C \rightarrow A$.

□



$T21 \quad A, \neg A \vdash \neg B$

1. A
2. $\neg A$
3. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
4. $\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$
5. $B \rightarrow A$
6. $B \rightarrow \neg A$
7. $(B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$
8. $A \rightarrow \neg B$
9. $(5) \rightarrow ((8) \rightarrow (B \rightarrow \neg B))$
10. $B \rightarrow \neg B$
11. $(B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B$
12. $\neg B$

(见T23)

$T22 \quad A, \neg A \vdash B$



T23 $(B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B$

证明: $\because B, B \rightarrow \neg B \vdash \neg B$

由推理定理知 $B \vdash (B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B$

又: $\vdash [(B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B] \rightarrow [B \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg B)]$ A05

$\therefore \vdash B \rightarrow (B \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg B))$

又 $\vdash [B \rightarrow (B \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg B))] \rightarrow (B \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg B))$ A04

$\therefore \vdash B \rightarrow \neg(B \rightarrow \neg B)$

从而 $\vdash (B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B$

□



$T24 \quad \vdash (A \rightarrow (C \wedge \neg C)) \rightarrow \neg A$

证明: $\because \vdash (C \wedge \neg C) \rightarrow \neg A$ T21

$\therefore \vdash (A \rightarrow (C \wedge \neg C)) \rightarrow (A \rightarrow \neg A)$

又 $\vdash (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$ T23

故 $\vdash (A \rightarrow (C \wedge \neg C)) \rightarrow \neg A$

□



以下定理T25至T31留作习题。

$$T25 \quad (B \vee A) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

$$T26 \quad (A \rightarrow B) \rightarrow (B \vee \neg A)$$

$$T27 \quad (A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$$

$$T28 \quad (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$$

$$T29 \quad (C \vee A) \rightarrow ((C \vee B) \rightarrow (C \vee (A \wedge B)))$$

$$T30 \quad (C \vee A) \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C)]$$

$$T31 \quad (A \rightarrow (C \vee B)) \rightarrow (C \vee (A \rightarrow B))$$



定理8.4 设 A 为命题, 若 A 在 H 中可证, 则
sequent $\vdash A$ 在 G' 中可证。

证明: 设 A 在 H 中可证, 对 $\vdash_H A$ 的证明过程的长度归纳
证明 $\vdash A$ 在 G' 中可证.

情况I. A 为公理, 即 A 为 $A01$ 或 $A02 \cdots$ 或 $A12$

$$(01) \quad \frac{A \vdash A}{\vdash A \rightarrow A} \rightarrow R$$

(02)

$$\frac{B \rightarrow C, B, A \vdash A, C \quad \frac{C, B, A \vdash C \quad C, B, A \vdash B, C}{(B \rightarrow C), B, A \vdash C} \rightarrow L}{\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C), B, A \vdash C}{A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C} \rightarrow R}{\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)}{\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))} \rightarrow R} \rightarrow R$$



(03)(04)同理可证

$$(05) \quad \frac{\frac{\frac{A, B \vdash A \quad \frac{A, B \vdash B}{A, \neg B, B \vdash}}{\frac{A, A \rightarrow \neg B, B \vdash}{A \rightarrow \neg B, B \vdash \neg A} \rightarrow R} \rightarrow R}{\frac{A \rightarrow \neg B \vdash B \rightarrow \neg A}{\vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)} \rightarrow R} \rightarrow L$$

(06)易见

$$(07) \quad \frac{\frac{A, B \vdash A}{A \wedge B \vdash A} \wedge L}{\vdash (A \wedge B) \rightarrow A} \rightarrow R$$

(08)与(07)同理

(09), (10)和(11)易见



(12)

$$\frac{\frac{B \rightarrow C, A \vdash A, C}{A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vdash C} \rightarrow L \quad \frac{C, B \vdash C, A \vdash C}{A \rightarrow C, B \rightarrow C, B} \rightarrow L}{\frac{A \rightarrow C, B \rightarrow C, B}{A \rightarrow C, B \rightarrow C, B \vdash C} \rightarrow L} \rightarrow L$$

$$\frac{A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B \vdash C}{\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))} \rightarrow R \quad (3\text{times})$$

情况II. A由 $B \rightarrow A$ 和B实施MP而得

由I.H.知sequent $\vdash B \rightarrow A$ 和 $\vdash B$ 在 G' 中可证,

在G中证明 $\vdash A$ 如下:

$$\frac{\frac{B \vdash A, B}{B \rightarrow A, B \vdash A} \rightarrow L \quad \vdash B}{\vdash B \rightarrow A} \text{Cut}$$

$$\frac{B \rightarrow A \vdash A}{\vdash A} \text{Cut}$$

因此 $\vdash A$ 得证。





定理8.5 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G' 中可证, 则在 H 中 $\Gamma \vdash \bar{\Delta}$, 这里

$$\bar{\Delta} \stackrel{=}{\Delta} \begin{cases} (\dots(B_1 \vee B_2)\dots \vee B_n) & \Delta \neq \emptyset \text{ and } \Delta = \{B_1, \dots, B_n\} \\ \perp & \Delta = \emptyset \end{cases}$$

记 \perp 为 $(C \wedge \neg C)$

证明: 设 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G' 中可证, 对 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明结构做归纳来证明 $\Gamma \vdash \bar{\Delta}$ 在 H 中成立。

情况1. $\Gamma \vdash \Delta$ 为公理, 设为 $\Phi, A \vdash \Lambda, A$

(1.1) 当 Λ 空时, 易见 $\Phi, A \vdash_H A$

(1.2) 当 Λ 非空, $\Phi, A \vdash_H \bar{\Lambda} \vee A$ 的证明过程如下:

(1) A 假设

(2) $A \rightarrow \bar{\Lambda} \vee A$ 公理

(3) $\bar{\Lambda} \vee A$ MP(2)(1)



情况2. $\Gamma \vdash \Delta$ 由实施规则而得

(2.1) 对于规则 $\neg L: \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$

当 Δ 为空时, 由I.H.知, $\Gamma \vdash_H A$,

我们证明 $\Gamma, \neg A \vdash C \wedge \neg C$ 如下:

(1) A ($\Gamma \vdash_H A$)

(2) $\neg A$ (假设)

(3) $A \wedge \neg A$

(4) $C \wedge \neg C$ (T32)

当 Δ 非空时, 由I.H.知 $\Gamma \vdash_H \overline{\Delta} \vee A$,

$\Gamma, \neg A \vdash_H \overline{\Delta}$ 的证明如下:

(1) $\neg A$ (假设)

(2) $\overline{\Delta} \vee A$ $\Gamma \vdash \overline{\Delta} \vee A$

(3) $(\overline{\Delta} \vee A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \overline{\Delta})$ T25

(4) $\overline{\Delta}$ MP(MP(3)(2))(1)



(2.2) 对于规则 $\neg R: \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$

当 Δ 为空时, 由I.H. 知 $\Gamma, A \vdash_H \perp$,
由推理定理得 $\Gamma \vdash_H A \rightarrow \perp$

又 $\vdash_H (A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg A$ T24

从而 $\Gamma \vdash_H \neg A$.

当 Δ 非空时, 由I.H. 知 $\Gamma, A \vdash_H \overline{\Delta}$
由推理定理得 $\Gamma \vdash_H A \rightarrow \overline{\Delta}$

又 $\vdash_H (A \rightarrow \overline{\Delta}) \rightarrow \overline{\Delta} \vee (\neg A)$ T26

故 $\Gamma \vdash_H \overline{\Delta} \vee (\neg A)$.



(2.3) 对于规则 $\vee L : \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$

当 Δ 为空时, 由I.H. 知 $\Gamma, A \vdash_H \perp$, $\Gamma, B \vdash_H \perp$,
由推理定理得 $\Gamma \vdash_H A \rightarrow \perp$ 且 $\Gamma \vdash_H B \rightarrow \perp$

又 $\vdash_H (A \rightarrow \perp) \rightarrow [(B \rightarrow \perp) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow \perp)]$ (A12)

从而 $\Gamma \vdash_H (A \wedge B) \rightarrow \perp$, 因此 $\Gamma, A \vee B \vdash \perp$.

当 Δ 非空时, 由I.H. 知 $\Gamma, A \rightarrow_H \bar{\Delta}$, $\Gamma, B \vdash_H \bar{\Delta}$
与上同理得 $\Gamma, A \vee B \vdash \bar{\Delta}$.

(2.4) 对于规则 $\vee R : \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$

由I.H. 得 $\Gamma \vdash_H (\bar{\Delta} \vee A) \vee B$,

由T27知 $\Gamma \vdash_H \bar{\Delta} \vee (A \vee B)$



(2.5) 对于规则 $\wedge L: \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$

由I.H.得 $\Gamma, A, B \vdash_H \bar{\Delta}$, 由推理定理得 $\Gamma \vdash_H A \rightarrow (B \rightarrow \bar{\Delta})$

$\Gamma \vdash_H A \rightarrow (B \rightarrow \bar{\Delta}) \rightarrow [(A \wedge B) \rightarrow \bar{\Delta}]$ (T28)

故 $\Gamma \vdash (A \wedge B) \rightarrow \bar{\Delta}$.

(2.6) 对于规则 $\wedge R: \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, (A \wedge B)}$

当 Δ 为空时, 易见.

当 Δ 非空时, 由I.H.知, $\Delta \vdash_H \bar{\Delta} \vee A$,

$\Gamma \vdash \bar{\Delta} \vee B$

$\therefore \vdash_H (\bar{\Delta} \vee A) \rightarrow ((\bar{\Delta} \vee B) \rightarrow (\bar{\Delta} \vee (A \wedge B)))$ T29

$\therefore \Gamma \vdash \bar{\Delta} \vee (A \wedge B)$



(2.7) 对于规则 $\rightarrow L: \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}$

当 Δ 为空时, 由I.H. 知 $\Gamma \vdash_H A, \Gamma, B \vdash_H \perp$

从而 $\Gamma \vdash_H B \rightarrow \perp$, 易见 $\Gamma, A \rightarrow B \vdash_H \perp$

当 Δ 非空时, 由I.H. 知 $\Gamma \vdash_H \overline{\Delta} \vee A, \Gamma, B \vdash_H \overline{\Delta}$,

从而 $\Gamma \vdash_H B \rightarrow \overline{\Delta}$, 又

$\therefore \vdash_H (C \vee A) \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C)]$ T30

这里取 C 为 $\overline{\Delta}$,

$\therefore \Gamma, A \rightarrow B \vdash_H \overline{\Delta}$

(2.8) 对于规则 $\rightarrow R: \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B}$

当 Δ 为空时, 由I.H. 知 $\Gamma, A \vdash_H B$

从而由推理定理知 $\Gamma \vdash_H A \rightarrow B$.



当 Δ 非空时, 由I.H. 知 $\Gamma, A \vdash_H \overline{\Delta} \vee B$

从而 $\Gamma \vdash A \rightarrow (\overline{\Delta} \vee B)$

又

$$\vdash_H (A \rightarrow (C \vee B)) \rightarrow (C \vee (A \rightarrow B)) \quad T31$$

取 C 为 $\overline{\Delta}$,

故 $\Gamma \vdash_H \overline{\Delta} \vee (A \rightarrow B)$

归纳完成. □

推论8.6 $\vdash A$ 在 G' 中可证 $\Leftrightarrow A$ 在 H 中可证。

这就说明 G' 与 H 等价。



本讲小结

- 公理和规则；
- 一些重要定理；
- H 与 G' 的等价性。



The End of Lecture 8