南京大学
Nanjing University

第6讲-完全性定理

一阶逻辑的完全性定理是数理逻辑的基本定理之一，非常重要。它由$K.\ Gödel$于20世纪30年代证明。

本讲中我们给出带等词的一阶谓词演算的完全性定理，证明方法采用Henkin在20世纪50年代给出的方法，这里利用极大协调集的方法，故我们

- 首先引入无穷公式集的协调性和极大协调性，
- 然后定义带等词的一阶谓词演算Ge，
- 最后证明完全性定理。

设$\mathscr{L}$为一阶语言，我们采用的语言是可数语言，即变元集为可数无穷集，从而全体项之集和全体公式之集皆为可数无穷集。

定义6.1 设Γ为公式集

1) Γ矛盾指存在Γ的有穷集Δ使$\Delta\vdash$在G中可证；

2) Γ协调指Γ不矛盾；

3) Γ协调（consistent）记为$Con(\Gamma)$, Γ矛盾记为$Incon(\Gamma)$.

命题6.2. 以下四点等价：

1) $Incon(\Gamma)$；

2) 存在公式A,存在Γ的有穷子集Δ,使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证；

3) 对任何公式A,存在Γ的有穷子集Δ,使$\Delta \vdash A$;

4) 对任何公式A,存在Γ的有穷子集Δ,使$\Delta \vdash A$和$\Delta \vdash \neg A$可证。

证明:

$(1) \Rightarrow (2)$: 因为 $\Delta \vdash$ 可证 $\Rightarrow$ $\Delta \vdash A$ 且 $\Delta \vdash \neg A$ 可证；

$(2) \Rightarrow (3)$:

因为 $\Delta \vdash A$ 且 $\Delta \vdash \neg A$ 可证 $\Rightarrow \Delta \vdash$ 可证 $\Rightarrow \Delta \vdash B$可证；

$(3) \Rightarrow (4)$ 易见；

$(4) \Rightarrow (1)$: 因为 $\Delta \vdash A$, $\Delta \vdash \neg A$ 可证 $\Rightarrow$ $\Delta \vdash$ 可证。 $\square$

我们同理可证：

命题6.3. 设Γ为公式集，以下四点等价：

1) $Con(\Gamma)$;

2) 对任何 Γ 的有穷子集Δ, $\Delta \vdash$在G中不可证;

3) 对任何公式A,对任何 Γ 的有穷子集Δ,
$\Delta \vdash A$不可证或$\Delta \vdash \neg A$不可证;

4) 存在公式A,使对任何 Γ 的有穷子集Δ，$\Delta \vdash A$不可证。

定义6.4. 设Γ为公式集,Γ为极大协调的($maximally\ consistent$)指

1) $Con(\Gamma)$和

2) 对任何公式集 Δ, 若$Con(\Delta)$ 且 $\Gamma \subseteq \Delta$ 则 $\Gamma = \Delta$.

命题6.5. Γ为极大协调的 iff

1) $Con(\Gamma)$和

2) 对任何公式 A, 若$Con(\Gamma \cup \{A\})$ 则 $A \in \Gamma$.

证明:

"$\Rightarrow$" 设 Γ 为极大协调,从而 $Con(\Gamma)$, 现设 $Con(\Gamma \cup \{A\})$,
因为 $\Gamma \cup \{A\} \supseteq \Gamma$, 故 $\Gamma \cup \{A\} = \Gamma$, 因此 $A \in \Gamma$.

"$\Leftarrow$" 设 $Con(\Gamma)$ 且对任何 A 有 $Con(\Gamma \cup \{A\}) \Rightarrow A \in \Gamma$,
现设 $Con(\Delta)$ 且 $\Gamma \subseteq \Delta$, 反设 $\Gamma \neq \Delta$, 从而有 $A \in \Delta - \Gamma$;
$\because$ $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \Delta$, 从而 $Con(\Gamma \cup \{A\})$, 故 $A \in \Gamma$ 矛盾。

$\square$

命题6.6. 设Γ为极大协调的 iff

1) $Con(\Gamma)$和

2) 对任何公式 A, $A \in \Gamma$ 或 $\neg A \in \Gamma$.

证明:

“$\Rightarrow$”：设 Γ 极大协调, 1)易见；2)对于A, 反设 $A \notin \Gamma$ 且$\neg A \notin \Gamma$.
从而由命题6.5 知 $Incon(\Gamma \cup \{A\})$ 且 $Incon(\Gamma \cup \{\neg A\})$
从而存在Δ_1和Δ_2,其为Γ的有穷子集使$\Delta_1, A \vdash$ 和 $\Delta_2, \neg A \vdash$可证，
从而 $\Delta_1, \Delta_2 \vdash$ 可证，因此$Incon(\Gamma)$ 矛盾！

“$\Leftarrow$”：设 1)和2),由命题6.5 我们只需证若$Con(\Gamma \cup \{A\})$,则$A \in \Gamma$,
由2)知 $A \in \Gamma$ 或 $\neg A \in \Gamma$ 成立，而 $\neg A \in \Gamma$ 与$Con(\Gamma \cup \{A\})$矛盾，
故 $\neg A \notin \Gamma$,因此 $A \in \Gamma$.

$\square$

命题6.7. 设 Γ 为极大协调集，A 为公式，

存在 Γ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \vdash A$ 可证 iff $A \in \Gamma$.

证明: "$\Rightarrow$"：设 $\Delta \vdash A$ 可证，从而$Con(\Gamma \cup \{A\})$,
若不然$Incon(\Gamma \cup A)$,则存在 Γ 的有穷子集 Δ' 使 $\Delta', A \vdash$可证，
故$\Delta, \Delta' \vdash$ 可证与 $Con(\Gamma)$ 矛盾！故$A \in \Gamma$。

"$\Leftarrow$"：易见。 $\square$

命题6.8.

1) 若 Γ 可满足，则 $Con(\Gamma)$；

2) 若 Γ 矛盾，则 Γ 不可满足.

证明: 1) 设 Γ 可满足,从而有 $\mathbb{M}$ 和 σ 使 $\mathbb{M} \vDash_\sigma \Gamma$,反设 $Incon(\Gamma)$, 从而存在有穷 $\Delta \subseteq \Gamma$ 使 $\Delta \vdash A \wedge \neg A$ 可证。

$\because \mathbb{M} \vDash_\sigma \Gamma$, $\therefore \mathbb{M} \vDash_\sigma \Delta$, 从而 $\mathbb{M} \vDash_\sigma A \wedge \neg A$ 矛盾。

2)为1)的逆否命题。

$\square$

命题6.9. 设 Γ 为有穷公式集且 $Con(\Gamma)$

1) 若 $\Gamma \vdash A$ 可证，则 $Con(\Gamma \cup \{A\})$;

2) 若 $\Gamma \vdash A$ 不可证，则 $Con(\Gamma \cup \{\neg A\})$.

证明:

1) 设 $\Gamma \vdash A$且$Con(\Gamma)$, 反设$Incon(\Gamma \cup \{A\})$,从而 $\Gamma, A \vdash$ 可证，故 $\Gamma \vdash$ 可证与 $Con(\Gamma)$ 矛盾！

2) 若 $Incon(\Gamma \cup \{\neg A\})$ 则 $\Gamma, \neg A \vdash$ 可证，从而 $\Gamma \vdash A$ 可证。 $\square$

在以前给出一阶谓词演算的G系统中没有出现等词 $\doteq$，现在我们给出带等词的一阶谓词演算Ge（有些教科书中记为$G_=$）

定义6.10. Gentzen系统 Ge 由 G 加上3个等词公理组成：

1) 若 $\vdash s \doteq s$, 这里s为任何项;

2) 若 $s_1 \doteq t_1, \cdots, s_n \doteq t_n \vdash f(s_1, \cdots, s_n) \doteq f(t_1, \cdots, t_n)$,
这里 f 为任何 n 元函数（$n = 1, 2, \cdots$），
对于$i \leq n$，s_i 和 t_i 为任何项;

3) $s_1 \doteq t_1, \cdots, s_n \doteq t_n, \quad p(s_1, \cdots, s_n) \vdash p(t_1, \cdots, t_n)$,
这里 p 为任何 n 元谓词（含等词）（$n = 1, 2, \cdots$），
对于$i \leq n$，s_i 和 t_i 为任何项。

约定6.11.

1) $\vec{t}$ 表示 $(t_1 \cdots t_n)$， $\vec{s}$ 表示 $(s_1 \cdots s_n)$，即采用矢量记法;

2) $f(\vec{t})$ 表示 $f(t_1 \cdots t_n)$，当 f 为 n 元函数;

3) $p(\vec{t})$ 表示 $p(t_1 \cdots t_n)$，当 p 为 n 元谓词;

4) $(\vec{s} \doteq \vec{t})$ 表示 $(\cdots((s_1 \doteq t_1) \wedge (s_2 \doteq t_2)) \wedge \cdots \wedge (s_n \doteq t_n) \cdots)$。

命题6.12. 以下 矢列 在 Ge 中可证

1) $\vdash (s \doteq s)$;

2) $\vdash (s \doteq t) \to (t \doteq s)$;

3) $\vdash (s \doteq t) \to (t \doteq u \to s \doteq u)$;

4) $\vdash (\vec{s} \doteq \vec{t}) \to f(\vec{s}) \doteq f(\vec{t})$;

5) $\vdash (\vec{s} \doteq \vec{t}) \to (p(\vec{s}) \to p(\vec{t}))$.

这里s, t, u 为任何项，f 为任何 n 元函数，$\vec{s}, \vec{t}$的长度为 n ，以及 p 为任何 n 元谓词。

证明: 1) 易见；

2) 和 3) 可由 1) 和 5) 在 G 中推出（证明留作习题）；

4) 由等词公理 2) 即得；5) 由等词公理 3) 即得. $\square$

命题6.13. 令 Γe 为以下句子组成的集合:

$$\forall x(x \doteq x), \forall\vec{x}\forall\vec{y}(\vec{x}\doteq\vec{y} \to f(\vec{x})\doteq f(\vec{y})),\text{ 这里 } f \text{ 为任何函数,}$$

$$\forall\vec{x}\forall\vec{y}(\vec{x}\doteq\vec{y} \to (p(\vec{x}) \to p(\vec{y}))),\text{ 这里 } p \text{ 为任何谓词。}$$

我们有 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 Ge 中可证 $\Leftrightarrow$ $\Gamma e, \Gamma \vdash \Delta$ 在 G 中可证。

证明: 留作习题。 □

定理6.14(Soundness). 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 Ge 中可证，则 $\Gamma \vDash \Delta$.

证明: 只需证3条等词公理是永真的，而这是易见的。 □

以下将证明完全性定理:

若 $\Gamma \vDash \Delta$，则 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 Ge 中可证。

定义6.15(Henkin集). 设 Γ 为公式集， Γ 为 Henkin 集指

1) Γ 极大协调;

2) 若 $\exists x.A \in \Gamma$ 则有项 t 使 $A[\frac{t}{x}] \in \Gamma$ 。

定义6.16. 设$\mathscr{L}$为一阶语言且$\|\mathscr{L}\| = \aleph_0$, 令$\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

定理6.17. 设 Φ 为公式集且$Con(\Phi)$, 则存在 $\mathscr{L}'$ 公式集 Ψ 使$\Psi \supseteq \Phi$ 且 Ψ 为 $\mathscr{L}'$ 的 Henkin 集。

证明: 设 $\mathscr{L}$ 的全体公式为 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \cdots (n \in \mathbb{N})$。令

$$\begin{cases} \Psi_0 = \Phi \\ \Psi_{n+1} = \begin{cases} \Psi_n & ,\text{若} Incon(\Psi_n \cup \{\varphi_n\}) \\ \Psi_n \cup \{\varphi_n\} & ,\text{若} Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\}) \text{且} \varphi_n \text{不呈形} \exists x.A \\ \Psi_n \cup \{\varphi_n, A[\frac{c}{x}]\} & ,\text{若} Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\}) \text{且} \varphi_n \text{呈形} \exists x.A \end{cases} \end{cases}$$

这里 c 为 $\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 中不曾使用过的新常元。

而令

$$\Psi = \cup \{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

我们有：

(1) $\Phi \subseteq \Psi$;

(2) 对所有的$n \in \mathbb{N}$，$Con(\Psi_n)$;

(3) $Con(\Psi)$；

(4) 在 Ψ_n 中出现的新常元是有穷的；

(5) Ψ 极大协调；

(6) Ψ 为 Henkin 集。

证明如下：

(1) $\Phi \subseteq \Psi$ 易见;

(2) 对 n 归纳证明 $Con(\Psi_n)$ 如下：

奠基： $n=0\ \because \Psi_0=\Phi\ \therefore Con(\Psi_0)$

归纳假设：设 $Con(\Psi_n)$

归纳步骤：欲证 $Con(\Psi_{n+1})$

情况1. $Incon(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$, 从而 $\Psi_{n+1}=\Psi_n$,
故由 I.H.知 $Con(\Psi_{n+1})$;

情况2. $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$且$\varphi_n$ 不呈形 $\exists x.A$, 从而 $Con(\Psi_{n+1})$;

情况3. $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$ 且 φ_n 呈形 $\exists x.A$,

这时可设 $\varphi_n \equiv \exists x.A$, $\Psi_{n+1}=\Psi_n \cup \{\varphi_n, A[\frac{c}{x}]\}$,

反设$Incon(\Psi_{n+1})$,从而存在有穷集 $\Delta' \subseteq \Psi_{n+1}$ 使$\Delta' \vdash$可证，

从而存在有穷集 $\Delta \subseteq \Psi_n$ 使 $\Delta, \exists x.A, A[\frac{c}{x}] \vdash$ 可证，

使其证明树为 T , 在 T 中将 c 替换成新变元 y,

从而 $\Delta, \exists x.A, A[\frac{y}{x}] \vdash$ 可证。因此由 $\exists L$ 知 $\Delta, \exists x.A \vdash$ 可证，

与 $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$ 矛盾。

(3) 欲证 $Con(\Psi)$ 反设 $Incon(\Psi)$,

从而存在 Ψ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \vdash$ 可证。

$\because \Delta$ 有穷，不妨设 $\Delta = \{A_1, \cdots, A_k\}$

$\therefore A_i(i = 1, 2, \cdots, k) \in \Psi = \cup\{\Psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

故对每个 $i \leq k$, 有 n_i 使 $A_i \in \Psi_{n_i}$,

因此有 l 使对每个 $i \leq k$, $A_i \in \Psi_l$, 从而 $\Delta \subseteq \Psi_l$,

然而 $Con(\Psi_l)$, 与 $\Delta \vdash$ 可证矛盾。

(4) 对 n 归纳证明即可。

(5) 欲证Ψ 极大协调，由于已证 Ψ 协调，现只需证极大性。

由前命题知，只需证若 $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$，则 $\varphi_n \in \Psi$.

设 $Con(\Psi \cup \{\varphi_n\})$, 从而 $Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$,

从而 $\varphi_n \in \Psi_{n+1}$, 因此， $\varphi_n \in \Psi$;

(6) Ψ 为Henkin集，对于公式 $\exists x.A \in \Gamma$, 设 $\exists x.A$ 为 φ_n,

$\because \varphi_n \in \Psi \therefore Con(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$,

故 $A[\frac{c}{x}] \in \Psi_{n+1}$, 从而 $A[\frac{c}{x}] \in \Psi$。

$\square$

定理6.18. 若 Γ 为Henkin集，则 Γ 为Hintikka集。

证明: 设 Γ 为Henkin集,对照Hintikka集的定义逐条验证如下：

(1) 这里因为$Con(\Gamma)$;

(2) 设 $\neg\neg A \in \Gamma$, $\because$ $\neg\neg A \vdash A$ 可证, $\therefore$ $\Gamma \vdash A$ 可证，
又 $\because$ Γ 极大协调，$\therefore$ $A \in \Gamma$;

(3) 设$A \to B \in \Gamma$, 反设$\neg A \notin \Gamma$且$B \notin \Gamma$, 由命题6.6,$A \in \Gamma$且$\neg B \in \Gamma$,
$\because$ $A, A \to B \vdash B$ 可证，$\therefore$ $B \in \Gamma$ 矛盾;

(4) 设 $\neg(A \to B) \in \Gamma$, $\because$ $\neg(A \to B) \vdash A, \neg(A \to B) \vdash \neg B$ 可证，
$\therefore$ $A \in \Gamma$ 且 $\neg B \in \Gamma$ (由命题6.7);

(5) 设 $A \wedge B \in \Gamma$, $\because$ $A \wedge B \vdash A, A \wedge B \vdash B$ 可证，$\therefore A, B \in \Gamma$;

(6) $\neg(A \wedge B) \in \Gamma$, 反设 $\neg A \notin \Gamma$且$\neg B \notin \Gamma$，从而由命题6.6知

$A \in \Gamma$ 且 $B \in \Gamma$， $\because A, B \vdash A \wedge B$ 可证，

$\therefore A \wedge B \in \Gamma$ 与$\neg(A \wedge B) \in \Gamma$ 矛盾;

(7)~(8) 同理可证;

(9) 设 $\forall x.A \in \Gamma$, $\because \forall x.A \vdash A[\frac{t}{x}]$ 可证, $\therefore A[\frac{t}{x}] \in \Gamma$;

(10) 设 $\neg\forall x.A \in \Gamma$, $\because \neg\forall x.A \vdash \exists x.\neg A$ 可证, $\therefore \exists x.\neg A \in \Gamma$,

又 $\because \Gamma$ 为Henkin集, $\therefore$ 有 t 使 $\neg A[\frac{t}{x}] \in \Gamma$;

(11)~(12) 同理可证;

(13)~(17)由命题 6.7 即得。

$\square$

定理6.19. 若 Γ 协调，则 Γ 可满足。

证明: Γ 协调

$\Rightarrow$ 存在Henkin集 $\Psi \supseteq \Gamma$

$\Rightarrow$ 存在 Ψ 使 $\Psi \supseteq \Gamma$ 且 Ψ 为Hintikka集

$\Rightarrow$ 存在 Ψ 使 $\Psi \supseteq \Gamma$ 且 Ψ 可满足

$\Rightarrow$ Γ 可满足. $\square$

定理6.20 (Completeness). $\Gamma \vdash A \iff \Gamma \vDash A$

证明: "$\Rightarrow$"为Soundness；

"$\Leftarrow$" 设 $\Gamma \vDash A$

情况1. $Incon(\Gamma)$, 易见 $\Gamma \vdash A$ 可证；

情况2. $Con(\Gamma)$,反设 $\Gamma \vdash A$ 不可证，从而 $Con(\Gamma \cup \{\neg A\})$,

故有 $\mathbb{M}$ 和 σ 使 $\mathbb{M} \vDash_\sigma \Gamma \cup \{\neg A\}$ 与 $\mathbb{M} \vDash_\sigma A$ 矛盾。

$\square$

定理6.21 (Compactness). 设 Γ 为公式集，若对任何 Γ 的有穷子集 Δ，有 Δ 可满足，则 Γ 可满足。

证明: 反设 Γ 不可满足，则 $Incon(\Gamma)$,

从而存在 Γ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \vdash A \wedge \neg A$,

从而 Δ 不可满足，矛盾。 $\square$

我们将在第十四讲给出Compactness(紧性)定理的纯语义证明，一个直接证明。

The End of Lecture 6