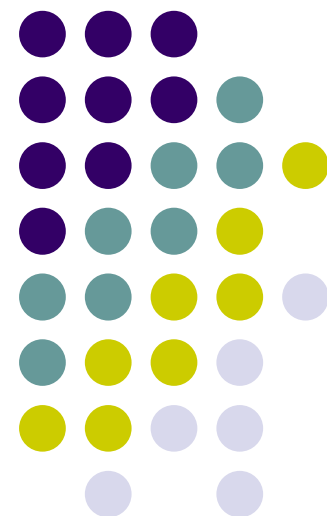




南京大學
Nanjing University

第六点五讲 不完备性定理





内容提要

- 可判定性(decidable)
 - Kolmogorov复杂性
 - 停机问题
- 形式系统的不完备性 (Incompleteness)
 - 哥德尔第一不完备性定理
 - 哥德尔第二不完备性定理



可判定性

- 对于一阶语言公式 A ，能否唯一地确定 A 为T或F？
- A problem is considered decidable if there is a procedure that, when applied to any instance of the problem, will produce a correct “yes” or “no” answer (or a solution) and will terminate (stop running) after a finite number of steps.



Kolmogorov复杂性

- 使用一个程序描述以下字符串：

0000000000

0101010101

1101110111

The smallest positive integer not describable
in fewer than nineteen English words



Kolmogorov复杂性

- 对于一个给定的字符串 x , 其Kolmogorov复杂性 $K(x)$ 是能够在确定性图灵机 U 上输出 x 的最短程序 P 的长度, 即:

$$K(x) = \min\{|P|: U(P) = x\}$$



Kolmogorov复杂性

- **Lemma 1** $K(x) \leq |x|$.
- **Lemma 2** 大多数字符串的Kolmogorov复杂性大于 $|x| - 2$.
- **Theorem 1** 对于自然数 n ，不存在程序 P 能够求解字符串 x 使得 $K(x) = n$.
- **Theorem 2** 对于任意字符串 x 和自然数 k ，不存在程序 P 能够判定 $K(x) = k$.



停机问题 Halting problem

- 停机问题：给定一个程序 P 和它的输入 I ，是否存在一个算法 H ，能够确定 P 在输入 I 上是否会在有限步骤内停止运行，而不是永远执行下去
- **Theorem 3 (Turing'36)** 停机问题不可解.



形式系统的不完备性

- 对于一个给定的形式系统 G ，是否对于所有的一阶语言公式 A 而言，在 $\vdash A$ 和 $\vdash \neg A$ 中有且仅有一个序贯可证
- 形式系统的可靠性 (soundness)
- 形式系统的完全性 (completeness)
- 形式系统的可验证性 (checkable)



哥德尔不完备性定理

- **Theorem 4 (Godel'31)** 在任何能力强于皮亚诺算术的形式系统中，存在某些命题，它们及不能够被证明为真，也不能够被证明为假.
- **Theorem 5 (Godel'31)** 任何能力强于皮亚诺算术的形式系统的相容性(consistence)在该形式系统内部不可证.