第六点五讲 不完备性定理

内容提要

- 可判定性(decidable)
  - Kolmogorov复杂性
  - 停机问题
- 形式系统的不完备性 (Incompleteness)
  - 哥德尔第一不完备性定理
  - 哥德尔第二不完备性定理

可判定性

- 对于一阶语言公式A，能否唯一地确定A为T或F？

- A problem is considered decidable if there is a procedure that, when applied to any instance of the problem, will produce a correct “yes” or “no” answer (or a solution) and will terminate (stop running) after a finite number of steps.

Kolmogorov复杂性

- 使用一个程序描述以下字符串：

0000000000

0101010101

1101110111

The smallest positive integer not describable
in fewer than nineteen English words

Kolmogorov复杂性

- 对于一个给定的字符串x, 其Kolmogorov复杂性$K(x)$ 是能够在一个确定性图灵机U上输出x的最短程序P的长度，即：

$$K(x) = \min\{|P| : U(P) = x\}$$

Kolmogorov复杂性

- **Lemma 1** $K(x) \leq |x|$.

- **Lemma 2** 大多数字符串的Kolmogorov复杂性大于$|x| - 2$.

- **Theorem 1** 对于自然数n，不存在程序P能够求解字符串x使得$K(x) = n$.

- **Theorem 2** 对于任意字符串x和自然数k，不存在程序P能够判定$K(x) = k$.

停机问题 Halting problem

- 停机问题：给定一个程序P和它的输入I，是否存在一个算法H，能够确定P在输入I上是否会在有限步骤内停止运行，而不是永远执行下去

- **Theorem 3 (Turing'36)** 停机问题不可解.

形式系统的不完备性

- 对于一个给定的形式系统G，是否对于所有的一阶语言公式A而言，在$\vdash A$和 $\vdash \neg A$中有且仅有一个序贯可证
- 形式系统的可靠性 (soundness)
- 形式系统的完全性 (completeness)
- 形式系统的可验证性 (checkable)

哥德尔不完备性定理

- **Theorem 4 (Godel’31)** 在任何能力强于皮亚诺算术的形式系统中，存在某些命题，它们及不能够被证明为真，也不能够被证明为假.

- **Theorem 5 (Godel’31)** 任何能力强于皮亚诺算术的形式系统的相容性(consistence)在该形式系统内部不可证.