第5讲-集合论的公理系统

本讲介绍集合论的公理系统 ZF，它是建立在一阶逻辑上的，其中选择公理将被多次用于以下各讲中。

集合是一个原始(primitive)概念，没有严格的定义，只有描述。

- 集合论创始人G. Cantor对集合的刻划：

"吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素。通常用大写字母表示集合，如 A、B、C 等，用小写字母表示元素，如a、b、c 等。若集合 A 系由 a、b、c 等诸元素所组成，则表如$A=\{a,b,c...\}$，而a为A之元素，亦常用 $a\in A$ 之记号表之者，a非A 之元素，则记如$a\notin A$。" （肖文灿译于1939年，《集合论初步》，商务印书馆）

- 例：$\{1,2,3\}$为集合，自然数之全体为集合。而如甚大之数或与点P接近之点，则不能为集合，因其界限不清。
- 集合中的元素互异，我们把元素的重复出现看作一次出现，如$\{2,2,3,3\}=\{2,3\}$。

既然Cantor教授提到“总括之全体”，那么怎样“总括”呢？
这里有两条重要原则：

- **外延原则**：集合由其元素完全决定，
  $A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$。

- **概括原则**：对于人们直观或思维之对象x的任一性质$P(x)$，
  存在集合S,其元素恰为具性质P的那些对象,记为$S = \{x|P(x)\}$。

  从而对任何a，$a \in S \leftrightarrow P(a)$。

  例：$\{1,2,3\} = \{x|x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3\}$

然由$\{x|P(x)\}$未必产生集合，B. Russell在1902年给出了反例，这就是著名的Russell悖论。

- Russell悖论：
  令$R = \{x|x \notin x\}$，从而若 R 为集合，则 $R \in R \leftrightarrow R \notin R$，从而矛盾，故 R 不为集合。

- 通过Russel悖论人们重新审视了集合论，修改概括原则，用形式方法讨论集合论，这样导致公理集合论的产生。

集合论语言为特殊的一阶语言：

1. 等词符：$\doteq$
2. 谓词符：$\in$(二元)
3. 常元符：$\varnothing$（空集符）
4. 函数符：无 (偶尔有对偶函数符$\{,\}$(二元)，幂集函数符$\mathcal{P}$(一元)，并集函数符$\cup$(一元))
5. 变元由 x,y,z 和 A,B,C 等表示

约定：

1. $A \subseteq B$指$\forall x(x \in A \to x \in B)$;

2. $x \notin A$指$\neg(x \in A)$;

3. $\{\mathrm{a}\}$指$\{\mathrm{a,a}\}$;

4. a^{+}指$a \cup \{a\}$;

5. $A \cup B$指$\cup\{A, B\}$;

6. $A \cap B$指$\{x | x \in A \wedge x \in B\}$;

7. $(\forall x \in A)\varphi$ 指$\forall x(x \in A \to \varphi)$;

8. $(\exists x \in A)\varphi$指$\exists x(x \in A \wedge \varphi)$;

Zermelo与Fraenkel在20世纪初建立集合论的公理系统（ZF），用公理来刻划集合。

1. 外延性公理：

$$\forall A \forall B \left[\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B \right]$$

2. 空集公理：

$$\exists B \forall x (\neg (x \in B))$$

由外延性公理可知这样的B是唯一的，人们把这样的B称为空集，并记为$\varnothing$,

3. 对偶公理：

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (x = u \vee x = v))$$

这样的B存在唯一。若S中有函数$\{,\}$，则对偶公理为

$$\forall u \forall v (x \in \{u, v\} \leftrightarrow (x = u \vee x = v))$$

4. 并集公理：

$$\forall A \exists B \forall x \left[x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A)(x \in b)\right]$$

这样的B是唯一的。若S中有函数$\cup$，则并集公理为

$\forall A \forall x (x \in \cup A \leftrightarrow (\exists b \in A)(x \in b))$。

取A为$\{u, v\}$，我们有$\forall x (x \in \cup\{u, v\} \leftrightarrow (\exists b \in \{u, v\})(x \in b))$，

从而 $\forall x (x \in u \cup v \leftrightarrow (x \in u \vee x \in v))$

5. 幂集公理：

$\forall a \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$

这样的B存在唯一，若S中有函数$\mathcal{P}$，则幂集公理为

$\forall x(x \in \mathcal{P}(a) \leftrightarrow x \subseteq a)$

6. 子集公理：

对于任何S-公式φ,若$FV(\varphi) = \{x_1, ..., x_k, x\}$且$B \notin FV(\varphi)$,则

$\forall \vec{x}\ \forall C \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow (x \in C \wedge \varphi))$。

这样的B存在唯一且为C的子集，以Cantor的概括记号，

B可表示为$\{x|x \in C \wedge \varphi\}$ 或$\{x \in C|\varphi\}$，

这修正了原来的概括原则以避免Russell悖论。

事实上，$\{a,b\} = \{x|x = a \vee x = b\}$,

$\mathcal{P}(a) = \{x|x \subseteq a\}$, $\cup A = \{x|(\exists b \in A)(x \in b)\}$

7. 无穷公理：

$\exists A(\varnothing \in A \wedge (\forall a \in A)(a^{+} \in A))$

这样的A不唯一。

称满足$\varnothing \in A \wedge (\forall a \in A)(a^{+} \in A)$的$A$为归纳集，记为$\mathrm{Ind}(A)$。

取A为由无穷公理保证存在的归纳集，

令$\mathbb{N} = \{x | x \in A \wedge \forall B(Ind(B) \to x \in B)\}$

由子集公理知，这样的$\mathbb{N}$是存在的，$\mathbb{N}$被定义为自然数集。

若我们定义$0 \triangleq \varnothing, Suc(n) = n^{+}$

则可证$(\mathbb{N}, 0, Suc)$ 为Peano算术的模型。

8. 替换公理：

对于任何S-公式$\varphi(x,y)$,其不含B且$FV(\varphi)=\{x,y,t_1,\ldots,t_k\}$,

$$\forall\vec{t}\ \forall A[(\forall x\in A)(\forall y_1\forall y_2(\varphi(x,y_1)\wedge\varphi(x,y_2)\to y_1\doteq y_2)$$
$$\to\exists B\forall y(y\in B\leftrightarrow(\exists x\in A)(\varphi(x,y))))],$$

用集合论记号，替换公理为：

对于函数F 和集合A，$F[A]$为集合。

9. 正则公理：

$$\forall A(\neg(A=\varnothing)\to(\exists a\in A)(a\cap A=\varnothing))$$

由正则公理知，不存在这样的链

$\ldots\in a_{n+1}\in a_n\in\ldots\in a_1\in a_0$ 且$A=\{a_0,a_1,\ldots,\ldots\}$

最后介绍一个极其重要的公理－
选择公理（Axiom of Choice,简记为AC）。

- 选择公理：

  $\forall A \exists \tau((\tau : \mathcal{P}(A) - \{\varnothing\} \to A) \wedge (\forall B \in (\mathcal{P}(A) - \{\varnothing\}))(\tau(B) \in B))$

  其中τ 被称为选择函数。

  选择公理有许多等价的表达(参见文献[7])。

- Zorn引理：

  设S为偏序集，若S中的每个链皆有界，则S有极大元。

AC与Zorn引理等价。

集合论的公理系统 ZF 是由公理1 - 9组成。

ZFC 指 ZF+AC。

我们有著名的独立性结果：

定理(1) $con(ZF) \Rightarrow con(ZF + AC)$

(2) $con(ZF) \Rightarrow con(ZF + \neg AC)$

即 AC 是独立于 ZF 的。

这样我们用一阶语言描述了集合论的公理系统 ZF。

The End of Lecture 5