第11讲-紧性定理

- 紧性定理是符号逻辑的一个极其重要的定理；
- 本讲主要给出命题逻辑和一阶逻辑的紧性定理；
- 我们将用语义方法证明此定理。

紧致性(Compactness)定理

定理1.27(G'的compactness).设 Γ 为命题的集合,若 Γ 的任何有穷子集可满足，则 Γ 可满足。

定义1.28 称 Δ 为有穷可满足指 Δ 的任何有穷子集可满足。

引理1.29 所有命题可被排列为 $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots \quad (n \in \mathbf{N})$。

引理1.30 设 Δ 为有穷可满足，A 为命题。若 $\Delta \cup \{A\}$ 不为有穷可满足，则 $\Delta \cup \{\neg A\}$ 为有穷可满足。

证明: 设 $\Delta \cup \{A\}$ 不为有穷可满足，反设 $\Delta \cup \{\neg A\}$ 也不为有穷可满足，从而存在 $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Delta$ 使 Δ_1, Δ_2 皆有穷且 $\Delta_1 \cup \{A\}$ 与 $\Delta_2 \cup \{\neg A\}$ 皆不可满足。由于 $\Delta_1 \cup \Delta_2$ 为 Δ 的有穷子集，故有 v 使 $v \vDash \Delta_1 \cup \Delta_2$，然

(1) 当 $v \vDash A$ 时，$v \vDash \Delta_1 \cup \{A\}$，从而矛盾。

(2) 当 $v \nvDash A$ 时，$v \vDash \Delta_2 \cup \{\neg A\}$，从而矛盾。

故 $\Delta \cup \{\neg A\}$ 有穷可满足。 $\square$

紧致性定理的证明

证明：令

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{A_n\} & \text{，若 } \Gamma_n \cup \{A_n\} \text{ 有穷可满足，} \\ \Gamma_n \cup \{\neg A_n\} & \text{，否则。} \end{cases}$$

先对 n 归纳证明 Γ_n 有穷可满足......(*)。

Basis $n = 0$ 时，易见 (*) 成立。

I.H. 设 Γ_n 有穷可满足。

Ind. Step 若 $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ 有穷可满足，则 Γ_{n+1} 有穷可满足，否则由引理 1.30 知 $\Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$ 有穷可满足，即 Γ_{n+1} 有穷可满足。归纳完成。

令 $\Delta = \bigcup\{\Gamma_n | n \in \mathbf{N}\}$，我们有 Δ 为有穷可满足。

设 Φ 为 Δ 的有穷子集，从而有 k 使 $\Phi \subseteq \{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$，故 $\Phi \subseteq \Gamma_{k+1}$，因此 Δ 有穷可满足。

对任何命题变元 p_i，$p_i \in \Delta$ 或 $\neg p_i \in \Delta$ 且恰具其一。

设 p_i 为 A_l。若 $p_i \notin \Delta$，则 $A_l \notin \Delta$，从而 $\Gamma_l \cup \{A_l\}$ 不为有穷可满足，因此 $\neg A_l \in \Gamma_{l+1}$，故 $\neg p_i \in \Delta$。

又反设 $p_i, \neg p_i \in \Delta$，从而 Δ 的子集 $\{p_i, \neg p_i\}$ 不可满足，故 Δ 不为有穷可满足。

令
$$v(p_i) = \begin{cases} T & \text{，若 } p_i \in \Delta \\ F & \text{，若 } \neg p_i \in \Delta \end{cases}$$

以下对 A 的结构归纳证明：若 $A \in \Delta$ 则 $v \vDash A$，否则 $v \nvDash A$......(*)。

情形 1. A 为命题变元 p_i，由上知 (*) 成立。

情形 2. A 为 $\neg B$。

1. 当 $A \in \Delta$ 时，Δ 为有穷可满足，所以 $B \notin \Delta$，从而由 I.H.知 $v \nvDash B$，从而 $v \vDash \neg B$。
2. 当 $A \notin \Delta$ 时，即 $\neg B \notin \Delta$，设 B 为 A_l，从而 $\Gamma_l \cup \{B\}$ 有穷可满足(若不然,有 $\neg B \in \Gamma_{l+1}$，与 $\neg B \notin \Delta$ 矛盾)。故 $B \in \Delta$，由 I.H. 知 $v \vDash B$，从而 $v \nvDash A$。

情形 3. A 为 $B \wedge C$。

1. 当 $A \in \Delta$ 时，有 $B \in \Delta$。
   反设 $B \notin \Delta$，从而 $\neg B \in \Delta$，但 $\{A, \neg B\}$ 不可满足，矛盾。
   因此 $B \in \Delta$，同理 $C \in \Delta$。
   由 I.H.知 $v \vDash B, v \vDash C$，从而 $v \vDash B \wedge C$，即 $v \vDash A$。

2. 当 $A \notin \Delta$ 时，有 $B \notin \Delta$ 或 $C \notin \Delta$。
   反设 $B \in \Delta$ 且 $C \in \Delta$，从而由 $A \notin \Delta$ 知 $\neg A \in \Delta$，
   然 $\{\neg A, B, C\}$ 不可满足，故矛盾。
   因此 $B \notin \Delta$ 或 $C \notin \Delta$。
   不妨设 $B \notin \Delta$，从而 $v \nvDash B$，因此 $v \nvDash A$。

其他情形同理可证 (*) 成立。

因此我们有 $v \vDash \Delta$，故 Δ 可满足，从而 Γ 可满足。 $\square$

定义11.1 设 E 为非空集,$F \subseteq \mathcal{P}(E)$

(1) F 为 E 上滤指

(a) $E \in F$

(b) $A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$

(c) $B \supseteq A \in F \Rightarrow B \in F$

(d) $\varnothing \notin F$

(2) F 为 E 上超滤指

(a) F为E上滤

(b) D为E上滤且

$F \subseteq D \Rightarrow F = D$

(3) 设$\varnothing \neq C \subseteq \mathcal{P}(E)$，$C$有有穷交性质 $(f.i.p.)$ 指

$$\forall A_1, \ldots, A_n \in C, A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n \neq \varnothing$$

命题11.2 令$C^+=\{A\subseteq E\mid \exists A_1\exists A_2\ldots\exists A_n\in C.A_1\cap A_2\ldots\cap A_n\subseteq A\}$,则

(1) $C\subseteq C^+$;

(2) C^+为E上滤$\Leftrightarrow C$有 $f.i.p.$;

(3) 若$C\subseteq D$且D为E上滤，则$C^+\subseteq D$;

(4) 若C^+为滤，则$C^+=\bigcap\{F\mid C\subseteq F$ 且F 为E 上滤$\}$,

称C^+为由C生成的滤;

证明: (1) $C\subseteq C^+$ 易见;

(2) $\because C^+$ 满足滤定义中的 $(a)\sim(c)$

$\therefore C^+$ 为 E 上滤

$\Leftrightarrow \varnothing\notin C^+ \Leftrightarrow \forall A_1\forall A_2\ldots\forall A_n\in C, A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\neq\varnothing$

$\Leftrightarrow C$ 有 $f.i.p.$

(3) 设 $C \subseteq D$ 且 D 为滤,

$$\because A \in C^{+} \Rightarrow \exists A_1 \exists A_2 \ldots \exists A_n \in C . A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n \subseteq A$$

$$\Rightarrow \exists A_1 \exists A_2 \ldots \exists A_n \in D . A_1 \cap A_2 .. \cap A_n \subseteq A$$

$$\Rightarrow \exists B \in D . B \subseteq A$$

$$\Rightarrow A \in D$$

$\therefore C^{+} \subseteq D.$

(4) 由 (3) 知 $C^{+} \subseteq \bigcap\{F \mid C \subseteq F$ 且 F 为 E 上滤 $\}$

$\because C^{+}$ 为滤,

$\therefore C^{+} \ni \{F \mid C \subseteq F$ 且 F 为 E上滤$\}$，从而

$C^{+} \supseteq \bigcap\{F \mid C \subseteq F$ 且 F 为 E上滤$\}$

因此等式成立. $\square$

命题11.3 设 $\varnothing \neq U \subseteq \mathcal{P}(E)$ 且 U 有 $f.i.p.$，我们有

$$U \text{ 为 } E \text{ 上超滤} \Leftrightarrow \forall \mathbb{X} \subseteq E, \mathbb{X} \in U \leftrightarrow (E-\mathbb{X}) \notin U.$$

证明: "$\Rightarrow$"：设 U 为 E 上超滤,

(1) 设 $\mathbb{X} \in U$，欲证 $E-\mathbb{X} \notin U$，反设 $E-\mathbb{X} \in U$，
从而 $\varnothing = \mathbb{X} \cap (E-\mathbb{X}) \in U$ 矛盾!

(2) 设 $E-\mathbb{X} \notin U$，欲证 $\mathbb{X} \in U$，令 $C = U \cup \{\mathbb{X}\}$,
从而 C 有 $f.i.p.$,
这是因为对于 $\mathbb{Y} \in U$，若 $\mathbb{Y} \cap \mathbb{X} = \varnothing$，则 $\mathbb{Y} \subseteq E-\mathbb{X}$,
从而 $E-\mathbb{X} \in U$ 矛盾。因此 C^+为 E 上滤，且 $C^+ \supseteq U$,
从而 $C^+ = U$ (U 为超滤). 故 $\mathbb{X} \in U$.

"$\Leftarrow$"设 $\mathbb{X} \in U \leftrightarrow (E-\mathbb{X}) \notin U$ 对任何 $\mathbb{X} \subseteq E$ 成立。

欲证 U 为超滤。

(1) $\because U$ 有 $f.i.p.$ $\therefore \varnothing \notin U.$

(2) $\because E \in U \leftrightarrow E-E \notin U \leftrightarrow \varnothing \notin U$ $\therefore E \in U.$

(3) 设 $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in U,$

$\because \mathbb{X} \cap \mathbb{Y} \cap [(E-\mathbb{X}) \cup (E-\mathbb{Y})] = \varnothing$

$\therefore (E-\mathbb{X}) \cup (E-\mathbb{Y}) \notin U,$

从而 $E-(\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}) \notin U$ ，故 $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} \in U.$

(4) 设 $\mathbb{X} \in U$ 且 $\mathbb{Y} \supseteq \mathbb{X}$,

$\because \mathbb{X} \cap (E - \mathbb{Y}) = \varnothing, \therefore E - \mathbb{Y} \notin U$, 故 $\mathbb{Y} \in U$.

从 (1) - (4) 知 U 为滤。

(5) 对于 $U \subseteq D$ 且 D 为 E 上滤,

欲证 $U = D$，只需证若 $\mathbb{X} \in D$ 则 $\mathbb{X} \in U$,

$\because (E - \mathbb{X}) \cap \mathbb{X} = \varnothing, \therefore E - \mathbb{X} \notin D$.

反设 $\mathbb{X} \notin U$ 则 $E - \mathbb{X} \in U$ ，从而 $E - \mathbb{X} \in D$ 矛盾！

因此 $\mathbb{X} \in U$.

$\square$

在以下命题中我们需要用到$Zorn$引理，亦即用到AC，它们两者是等价的 (参见文献[7])。

$\boldsymbol{Zorn}$引理:

设 S 为偏序集，若 S 中的每个链皆有界，则 S 有极大元。

命题11.4. 设 E 为非空集且 $\varnothing \neq C \subseteq \mathcal{P}(E)$，若 C 有 $f.i.p.$，则存在一个包含 C 的超滤 U。

证明: 令 $S = \{F \mid C \subseteq F$ 且 F 为 E 上滤 $\}$，

从而 $C^+ \in S$，故 $S \neq \varnothing$。

设 $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \ldots \subseteq D_n \subseteq \ldots$ 为 S 中的任何链，

以下证 $\{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 有界。

令 $D=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$，欲证 D 为 $\{D_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ 的上界:

(1) $C\subseteq D$ 易见;

(2) $E\in D$ 易见;

(3) $\mathbb{X},\mathbb{Y}\in D \Rightarrow$ 有 m 使 $\mathbb{X},\mathbb{Y}\in D_m$

$\Rightarrow$ 有 m 使 $\mathbb{X}\cap\mathbb{Y}\in D_m \Rightarrow \mathbb{X}\cap\mathbb{Y}\in D$;

(4) $\mathbb{X}\in D$ 且 $\mathbb{X}\subseteq\mathbb{Y} \Rightarrow$ 有 m 使 $\mathbb{X}\in D_m$ 且 $\mathbb{X}\subseteq\mathbb{Y}$

$\Rightarrow \mathbb{Y}\in D_m \Rightarrow \mathbb{Y}\in D$;

(5) $\varnothing\notin D_n (n=1,2\ldots) \Rightarrow \varnothing\notin \bigcup\limits_{n\in N} D_n$ 。

因此 $D\in S$ 且 $D_n\subseteq D$ 故 D 为 $\{D_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ 的上界。

由 $Zorn$ 引理指知存在极大元 $U\in S$ ，

从而有 E 上超滤 U 使 $U\supseteq C$. $\square$

定义11.5. 设 I 为非空集，$V=\{v_i \mid i\in I\}$ 为赋值集。

令 U 为 I 上滤，定义赋值 v 如下：

对于任何 $P\in PS, v(P)=T \Leftrightarrow \{i \mid v_i(P)=T\}\in U$.

命题11.6. 若 U 为超滤，则

(1) $v(P)=F \Leftrightarrow \{i \mid v_i(P)=F\}\in U$；

(2) 对于命题 A，$v\vDash A \Leftrightarrow \{i \mid v_i\vDash A\}\in U$.

证明: (1) 易见；

(2) 对 A 的结构作归纳证明 $v\vDash A \Leftrightarrow \{i \mid v_i\vDash A\}\in U$:

(i) $A\equiv P$

$$v\vDash A \Leftrightarrow v(P)=T \Leftrightarrow \{i \mid v_i\vDash P\}\in U;$$

(ii) $A \equiv \neg B$

$$v \models \neg B \Leftrightarrow v(B) = F$$
$$\Leftrightarrow \{i \mid v_i \models B\} \notin U$$
$$\Leftrightarrow I - \{i \mid v_i \models B\} \in U$$
$$\Leftrightarrow \{i \mid \text{非 } v_i \models B\} \in U$$
$$\Leftrightarrow \{i \mid v_i \models \neg B\} \in U;$$

(iii) $A \equiv B \wedge C$

$$v \models B \wedge C \Leftrightarrow v(B) = v(C) = T$$
$$\Leftrightarrow \{i \mid v_i \models B\} \in U \ \ and \ \ \{i \mid v_i \models C\} \in U$$
$$\Leftrightarrow \{i \mid v_i \models B\} \cap \{i \mid v_i \models C\} \in U$$
$$\Leftrightarrow \{i \mid v_i \models B \wedge C\} \in U.$$

当 $A \equiv B \vee C$ 或 $A \equiv B \to C$ 时，同理可证。

$\square$

定义11.7. 设Γ为命题集且任何Γ的有穷子集Δ可满足，令

$$I = \{\Delta \mid \Delta \text{ 有穷且 } \Delta \subseteq \Gamma\}$$

对于 $i \in I$， v_i 为满足 i 的赋值，即 $v_i \vDash i (i \in I)$。

令 $A^* = \{i \in I \mid A \in i\}$，$C = \{A^* \mid A \in \Gamma\}$。

命题11.8. C 有 $f.i.p.$。

证明: $\because \{A_1, ..., A_n\} \in A_i^* \cap A_2^* \cap \ldots \cap A_n^*$

$\therefore C$ 有 $f.i.p.$ 。 □

从而我们有超滤 $U \supseteq C$，对于 $A^* \in U$

$\because i \in A^* \Leftrightarrow A \in i \Rightarrow v_i \vDash A$

$\therefore A \in \Gamma \Rightarrow A^* \subseteq \{i \in I \mid v_i \vDash A\}.$

命题11.9. 若 $A \in \Gamma$，则 $\{i \in I \mid v_i \vDash A\} \in U$

证明: $\because A \in \Gamma \Rightarrow A^* \in U$ 又 $A^* \subseteq \{i \in I \mid v_i \vDash A\}$

$\therefore \{i \in I \mid v_i \vDash A\} \in U.$ □

定理11.10. 对于以上的超滤 U 和 I，定义赋值 v 如下:

$$v(P) = T \Leftrightarrow \{i \in I \mid v_i(P) = T\} \in U$$

我们有 $v \vDash \Gamma.$

证明: 对于任何命题 A，我们有:

(1) $v \vDash A \Leftrightarrow \{i \in I \mid v_i \vDash A\} \in U;$

(2) 对于 $A \vDash \Gamma, \{i \in I \mid v_i \vDash A\} \in U$。

故 $v \vDash A$，从而 $v \vDash \Gamma$。v为Γ的模型。 □

下面我们将给出一阶逻辑的紧性定理。

定义11.12. 设 $I \neq \varnothing$, D为I上的滤, $(A_i)_{i\in I}$为一簇非空集,令

(1) $C = \prod_{i\in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall i \in I)(f(i) \in A_i)\}$,

有时记 f 为 $\langle f(i) \mid i \in I\rangle$;

(2) C 上二元关系 $=_D$ 被定义为:

$\forall f, g \in C, f =_D g \Leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in D$。

命题11.13. $=_D$ 为 C 上的等价关系。

证明: (1) 自反性　$f =_D f$ （因为 $I \in D$ ）；

(2) 对称性　$f =_D g \Rightarrow g =_D f$　易见；

(3) 传递性　$f =_D g \ \& \ g =_D h \Rightarrow f =_D h$。

$$\because f =_D g \ \& \ g =_D h$$

$$\Rightarrow A = \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in D \ \&$$

$$B = \{i \in I \mid g(i) = h(i)\} \in D$$

$$\Rightarrow \{i \in I \mid f(i) = h(i)\} \supseteq A \cap B \in D$$

$$\Rightarrow f =_D h.$$

$\therefore$ 传递性为真。 □

定义11.14. 设 $\mathscr{L}$ 为一阶语言，对于 $i \in I$，$\mathscr{A}_i$ 为 $\mathscr{L}$-结构，$\{\mathscr{A}_i \mid i \in I\}$关于模$D$的积 $\mathscr{B}$ 为一个 $\mathscr{L}$ 结构。其定义如下:

(1) $\mathscr{B}$ 的论域 $B = \{[f]_D \mid f \in \prod_{i \in I} A_i\}$，

这里 $[f]_D$ 为f关于 $=_D$ 的等价类, 有时简记为 $[f]$。

事实上，$B = (\prod_{i \in I} A_i)/ =_D$，有时记 B 为 $\prod_D (A_i)_{i \in I}$;

(2) 对于常元 C，$C_B = [\langle C_{A_i} \mid i \in I\rangle]_D$;

(3) 对于 n 元函数 f 且 $n > 0$，任给 $[g_j](j \le n) \in B$

$f_B([g_1], \dots, [g_n]) = [\langle f_{A_i}(g_1(i), \dots, g_n(i)) \mid i \in I\rangle]_D$

(4) 对于n元谓词 p，任给 $[g_j](j \le n) \in B$

$p_B([g_1], \dots, [g_n]) = T \Leftrightarrow \{i \mid p_{A_i}(g_1(i), \dots, g_n(i)) = T\} \in D$

当 D 为超积时，称 $\prod_D (A_i)_{i \in I}$ 为 $\{\mathscr{A}_i \mid i \in I\}$ 的超积。

下面命题说明 $\mathscr{B}$ 的定义是合法的。

命题11.15. $=_D$ 为同余关系。

证明: (1) 设 f 为一元函数（对于多元函数同理可证),

设 $g =_D h$，欲证 $f_B([g]) = f_B([h])$.

$$\begin{aligned}
\because\ & f_B([g]) = f_B([h]) \\
& \Leftarrow \langle f_{A_i}(g(i)) \mid i \in I\rangle =_D \langle f_{A_i}(h(i)) \mid i \in I\rangle \\
& \Leftarrow \{i \in I \mid f_{A_i}(g(i)) = f_{A_i}(h(i))\} \in D \\
& \Leftarrow \{i \in I \mid g(i) = h(i)\} \in D \\
& \Leftarrow g =_D h
\end{aligned}$$

$\therefore$ 命题得证

(2) 设 p 为一元谓词，设 $g =_D h$，

欲证 $p_B([g]) = T \Leftrightarrow p_B([h]) = T$，

只需证 $\{i \mid p_{A_i}(g(i)) = T\} \in D \Leftrightarrow \{i \mid p_{A_i}(h(i)) = T\} \in D$，

只需证 $\{i \mid p_{A_i}(g(i)) = T\} \in D \Rightarrow \{i \mid p_{A_i}(h(i)) = T\} \in D$。

令 $A = \{i \mid p_{A_i}(g(i)) = p_{A_i}(h(i))\}$，从而 $A \in D$，

故若 $\{i \mid p_{A_i}(g(i)) = T\} \in D$，则

$\{i \mid p_{A_i}(h(i)) = T\} \supseteq \{i \mid p_{A_i}(g(i)) = T\} \cap A \in D$，

从而 $\{i \mid p_{A_i}(h(i)) = T\} \in D$。

□

约定：为了以下叙述方便，我们采用一些简记方式。设 t 为项，A 为公式且 $FV(t), FV(A) \subseteq \{y_1, \cdots, y_n\}$，令赋值为 σ，$\sigma(y_i) = a_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，$\mathscr{B}$ 为结构.

(1) $t_{B[\sigma]}$ 简记为 $t_B[a_1, \cdots, a_n]$;

(2) $A_{B[\sigma]}$ 简记为 $A_B[a_1, \cdots, a_n]$;

(3) $\mathscr{B} \vDash_\sigma A$ 简记为 $\mathscr{B} \vDash A[a_1, \cdots, a_n]$.

命题11.16. 设 t 为项且 $FV(t) \subseteq \{y_1, \ldots, y_n\}$，

对于任何 $[g_j] \in B$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$，有

$$t_B[[g_1], \ldots, [g_n]] = [\langle t_{A_i}[g_1(i), \ldots, g_n(i)] \mid i \in I \rangle]_D \quad \ldots\ldots(*)$$

证明：对 t 的结构归纳证明(*).

情况1. t 为常元 C，易见(*)成立；

情况2. t 为 y_1，$LHS \equiv [g_1]$，$RHS \equiv [\langle g_1(i) \mid i \in I \rangle]_D = [g_1]$；

情况3. t为 $f(s)$，且 $FV(s) \subseteq \{y_1, \ldots, y_n\}$

$$\begin{aligned}
LHS &\equiv (f(s))_B[[g_1], \ldots, [g_n]] \\
&= f_B(s_B[[g_1], \ldots, [g_n]]) \\
&= f_B([\langle s_{A_i}[g_1(i), \ldots, g_n(i)] \mid i \in I \rangle]_D) \quad \text{（这里用 } I.H.\text{）} \\
&= [\langle f_{A_i}(s_{A_i}[g_1(i), \ldots, g_n(i)]) \mid i \in I \rangle]_D \\
&= [\langle t_{A_i}[g_1(i), \ldots, g_n(i)] \mid i \in I \rangle]_D \qquad \square
\end{aligned}$$

命题11.17. 设 A 为公式且 $FV(A)=\{y_1,\cdots,y_n\}$，

对于任何 $[g_j](j=1,2,\cdots,n)\in B$，有

$$\mathscr{B}\vDash A[[g_1],\cdots,[g_n]]\Leftrightarrow\{i\in I\mid \mathscr{A}_i\vDash A[g_1(i),\cdots,g_n(i)]\}\in D\quad\ldots(*)$$

证明: 对 A 的结构作归纳证明(*)

情况1. A 为 $t\doteq s$

$\mathscr{B}\vDash(t\doteq s)[[\vec{g_j}]]$

$=t_B[[\vec{g_j}]]=s_B[[\vec{g_j}]]$

$\Leftrightarrow[\langle t_{A_i}[g_1(i),\ldots,g_n(i)]\mid i\in I\rangle]_D=[\langle s_{A_i}[g_1(i),\ldots,g_n(i)]\mid i\in I\rangle]_D$

$\Leftrightarrow\{i\in I\mid t_{A_i}[\vec{g}(i)]=s_{A_i}[\vec{g}(i)]\}\in D$

$\Leftrightarrow\{i\in I\mid \mathscr{A}_i\vDash(t\doteq s)[g_1(i),\ldots,g_n(i)]\}\in D$

（n 元情况同理可证）.

情况2. A为 $p(t)$

$$\mathscr{B} \vDash p(t)[[\vec{g}]]$$

$$\Leftrightarrow p_B(t_B[[\vec{g}]]) = T$$

$$\Leftrightarrow p_B([\langle t_{A_i}[g_1(i), \ldots, g_n(i)] \mid i \in I \rangle]_D) = T$$

$$\Leftrightarrow \{i \mid p_{A_i}(t_{A_i}[g_1(i), \ldots, g_n(i)]) = T\} \in D$$

$$\Leftrightarrow \{i \mid \mathscr{A}_i \vDash A[g_1(i), \ldots, g_n(i)]\} \in D$$

情况3. A 为 $\neg H$

$$\mathscr{B} \vDash \neg H[[\vec{g}]] \Leftrightarrow \mathscr{B} \nvDash H[[\vec{g}]]$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathscr{A}_i \vDash H[g_1(i), \ldots, g_n(i)]\} \notin D$$

$$\Leftrightarrow I - \{i \in I \mid \mathscr{A}_i \vDash H[g_1(i), \ldots, g_n(i)]\} \in D$$（因为D为超滤）

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathscr{A}_i \vDash \neg H[g_1(i), \ldots, g_n(i)]\} \in D$$

情况4. A 为 $E \wedge H$

$$\mathscr{B} \vDash A[[\vec{g}]] \Leftrightarrow \mathscr{B} \vDash E[[\vec{g}]] \text{ 且 } \mathscr{B} \vDash H[[\vec{g}]]$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathscr{A}_i \vDash E[g_1(i), \ldots, g_n(i)]\} \in D \text{ 且}$$

$$\{i \in I \mid \mathscr{A}_i \vDash H[g_1(i), \ldots, g_n(i)]\} \in D \quad (I.H.)$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathscr{A}_i \vDash E[\vec{g}(i)]\} \cap \{i \in I \mid \mathscr{A}_i \vDash H[\vec{g}(i)]\} \in D$$

$$\Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathscr{A}_i \vDash A[\vec{g}(i)]\} \in D$$

情况5. A 为 $E \vee H$，$E \to H$，与上同理可证。

情况6. A 为 $\exists x.E$

因为 $\mathscr{B} \vDash \exists x.E[[g_1], \ldots, [g_n]]$

$\Leftrightarrow$ 存在 $g \in B$ 使 $\mathscr{B} \vDash E[[g], [g_1], \ldots, [g_n]]$

$\Leftrightarrow$ 存在 $g \in B$ 使 $\mathscr{B} \vDash E[[g],[g_1],\ldots,[g_n]]$

$\Leftrightarrow$ 存在$g \in B$使 $\mathbb{X} = \{i \in I \mid \mathscr{A}_i \vDash [g(i), g_1(i), \ldots, g_n(i)]\} \in D$

以及 $\{i \in I \mid \mathscr{A}_i \vDash A[g_1(i), \ldots, g_n(i)]\} \in D$

$\mathbb{Y} = \{i \in I \mid$ 存在 $a_i \in A_i$ 使 $\mathscr{A}_i \vDash E[a_i, g_1(i), \ldots, g_n(i)] \in D$

故余下只需证存在 $[g] \in B$ 使 $\mathbb{X} \in D \Leftrightarrow \mathbb{Y} \in D$

"$\Rightarrow$"部分：设存在 $[g] \in B$ 使 $\mathbb{X} \in D$，

令 $a_i = g(i)$，从而 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y}$，因此 $\mathbb{Y} \in D$.

"$\Leftarrow$"部分：设 $\mathbb{Y} \in D$，

令 $G = \{\langle i, x\rangle \mid i \in I$且 $x \in A_i$ 且 $\mathscr{A}_i \vDash E[x, \vec{g}(i)]\}$

由AC知,存在 $[g] \in B$ 使 $\langle i, g(i)\rangle \in G$ 对任何 $i \in I$ 成立。

故 $\mathbb{X} \in D$ 。因此得证。

情况7. A 为 $\forall x.E$，与上同理可证。 $\square$

推论11.18. 设 A 为句子，$\mathscr{B} \vDash A \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathscr{A}_i \vDash A\} \in D$。
这里 D 为超滤。

定理11.19. （一阶逻辑的紧性定理）设 Γ 为句子集，
若 Γ 的任何有穷子集可满足，则 Γ 可满足。

证明: 令 $I = \{\Delta \subseteq \Gamma \mid \Delta$ 有穷 $\}$，且对于 $i \in I$
令 $\mathscr{A}_i$ 为满足 i 的结构，即 $\mathscr{A}_i \vDash i.$
对于 $A \in \Gamma$, 令 $A^* = \{i \in I | A \in i\}$, 令 $C = \{A^* \mid A \in \Gamma\}$,
从而 C 有 $f.i.p.$，这是因为对于任何 $A_1^*, \dots, A_n^* \in C$，

$$A_1^* \cap A_2^* \dots \cap A_n^* = \bigcap_{k=1}^{n} \{i \in I \mid A_k \in i\} = \{i \in I \mid A_1, \dots, A_n \in i\}$$

从而 $\{A_i, \dots, A_n\} \in A_1^* \cap \dots \cap A_n^*$。

由 $Zorn$ 引理知，存在超滤 $U \supseteq C$，

从而对于任何 $A \in \Gamma$，有 $A^* \in U$。

$\because i \in A^* \Rightarrow A \in i \Rightarrow \mathscr{A}_i \vDash A$

$\therefore$ 对于每个 $A \in \Gamma$，$A^* \subseteq \{i \in I \mid \mathscr{A}_i \vDash A\}$

$\because U$ 为滤

$\therefore \{i \in I \mid \mathscr{A}_i \vDash A\} \in U$

令 $\mathscr{B} = \prod_U (A_i)_{i \in I}$，从而 $\mathscr{B} \vDash A \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathscr{A}_i \vDash A\} \in U$，

又因为对于每个 $A \in \Gamma$ 有 $\{i \in I \mid \mathscr{A}_i \vDash A\} \in U$,

因此 $\mathscr{B} \vDash A$ 对于每个 $A \in \Gamma$ 成立。

故$\mathscr{B} \vDash \Gamma$, 即$\Gamma$可满足。 $\square$

定理11.20. 设 Γ 为公式集，

若 Γ 的每个有穷子集皆可满足，则 Γ 可满足。

证明: 设 Γ 为 $\mathscr{L}$-公式集且 $FV(\Gamma) = \{y_j \mid j \in J\}$。

令 $\{c_j | \in J\}$ 为新常元符，$\mathscr{L}' = \mathscr{L} + \{c_j \mid j \in J\}$。

若 $A \in \Gamma$，则令 $A' \equiv A[\frac{c_j}{y_j}]$，$\Gamma' = \{A' \mid A \in \Gamma\}$。

若 Γ 的每个有穷子集皆可满足，则 Γ' 亦然。

这是因为设 $\Delta' \subseteq \Gamma'$ 且 Δ' 有穷，从而 $\Delta \subseteq \Gamma$ 有穷，

故有 $\mathscr{L}-$ 模型 $\mathbb{M}$ 和赋值 σ 使 $\mathbb{M} \vDash_\sigma \Delta$，

在 $\mathscr{L}'$ 中，令 $(c_j)_M = \sigma(y_j)$，$\mathbb{M}'$ 为 $\mathbb{M}$ 的扩展，

从而 $\mathbb{M}' \vDash \Delta'$ 即 Δ' 可满足，由上定理知 Γ' 可满足，

即有 $\mathscr{L}-$ 模型 $\mathbb{M}'$ 使 $\mathbb{M}' \vDash \Gamma'$，令 $\mathbb{M} = \mathbb{M}' \upharpoonright \mathscr{L}$

且令 $\sigma(y_j) = (c_j)_{M'}$，从而 $\mathbb{M} \vDash_\sigma \Gamma$ 即 Γ 可满足。 $\square$

以上我们给出紧性定理的语义证明，在此用到 AC。
事实上，绝大多数教科书中紧性定理的证明是利用到 $Gödel$ 的完备性定理给出的。

证明: 设 Γ 为公式集，我们有 $con(\Gamma) \Leftrightarrow \Gamma$ 可满足;

若 Γ 的每个有穷子集可满足，则 Γ 的每个有穷子集协调;

反设 Γ 不可满足，从而 Γ 不协调，因此 $\Gamma \vdash \perp$，

这样存在有穷 $\Delta \subseteq \Gamma$ 使 $\Delta \vdash \perp$，与 $con(\Delta)$ 矛盾。 $\square$

The End of Lecture 11