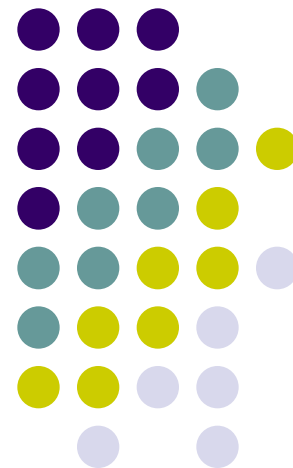




南京大學

数理逻辑

主讲人：秦逸



自我介绍

- 姓名： 秦逸
 - 电子邮件： yiqinics@nju.edu.cn
 - 办公室： 计算机系楼501
 - Office Hour: 每周二下午4:00 ~ 6:00

关于本课程

- 目的：
 - 数理逻辑的**基本概念**、**基本定理**和**基本方法**
- 计分方式：
$$\text{总成绩} = \text{平时成绩 (10\%)} + \text{期中作业 (30\%)} + \text{期末考试 (60\%)} ;$$

教材



南京大學

- 宋方敏, 吴骏. 《数理逻辑十二讲》, 机械工业出版社, 2017.

注意选择第二次印刷版本





主要内容

第一讲 命题逻辑

第二讲 Boole代数

第三讲 一阶逻辑语言

第四讲 一阶逻辑的自然推理系统

第五讲 集合论的公理系统

第六讲 完全性定理

第七讲 Herbrand定理

第八讲 命题逻辑的永真推理系统

第九讲 一阶逻辑的永真推理系统

第十讲 Gentzen的Hauptsatz

第十一讲 紧性定理

第十二讲 模态逻辑概述

- **基本概念**：命题逻辑，一阶逻辑，模态逻辑
- **基本定理**：完全性定理，Herbrand定理，紧性定理，Gentzen系统基本定理
- **基本方法**：一阶逻辑的自然推理系统，永真推理系统



南京大學

本课程线上教学相关

- 课程教学网站:
 - <https://yiqinnju.github.io/course/MathLogic/MathLogic.html>
- 课程邮箱: mathlogicnju@163.com
 - 用于提交作业
- 课程qq群: 1030429021
 - 用于课外时间答疑及交流



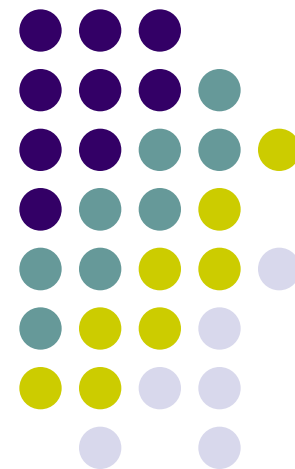
扫一扫二维码，入群聊





南京大學

引子 - 什么是数理逻辑?

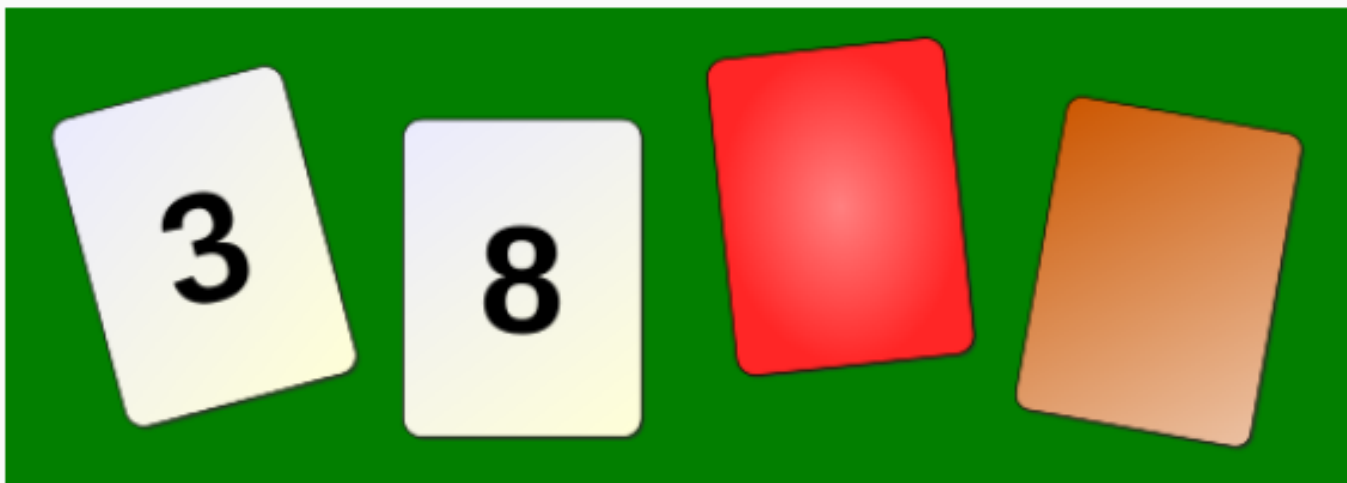


什么是逻辑

- 1. 逻辑能够告诉我们真假？
- 2. 逻辑能够帮助我们证明？
- 3. 逻辑能够指导我们推理？

Wason测试

桌面上有四张牌，每张牌一面是数字，一面是颜色，能看到的情况如下。现在有人宣称：(对这些牌来说) 如果一面是偶数，那么另一面一定是红色的。请问你要翻开什么牌才能完全验证他说的是不是真话？





南京大學



“I’m at that stage in life
where I stay out of
arguments.

Even if you say $1+1=5$,
you’re right. Have fun.”

— Keanu Reeves



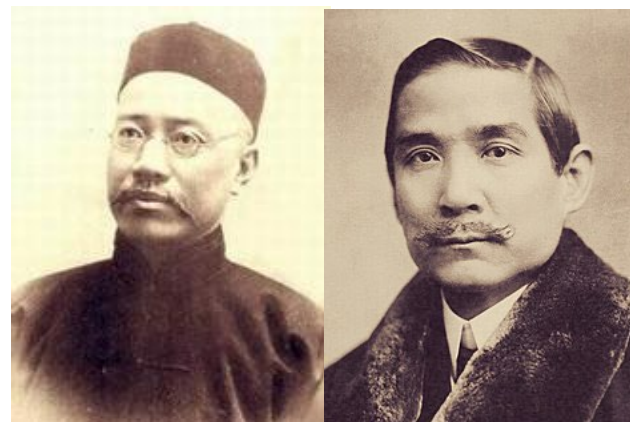
南京大學

Your Position Determines Your Perspective



逻辑学

- 逻辑：推理的思想过程
- 逻辑学：研究“有效推理的标准”的一门学科
- Logic 一词来自古希腊语 λογική
 - 字根源于希腊语 λόγος
 - 词语、思想、概念、推理
 - 严复翻译为“名学”
 - 孙中山翻译为“理则”



中国古代的逻辑

- 墨家·墨辩
 - 世界**三大古典逻辑(?)**体系之一
 - 三表说 -> 三物论

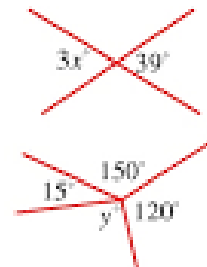
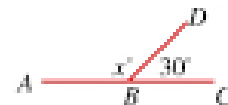
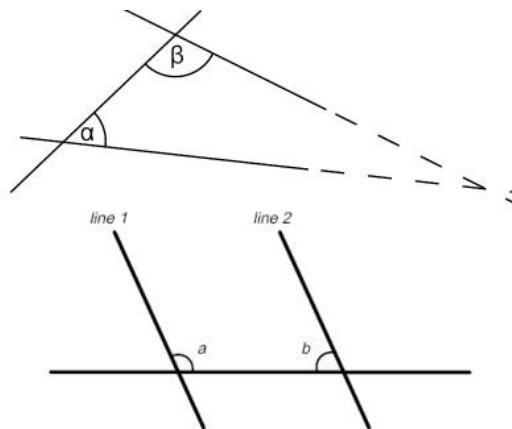
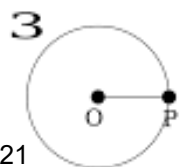
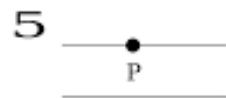
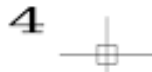
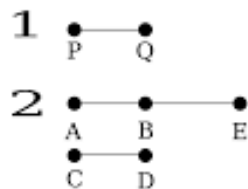
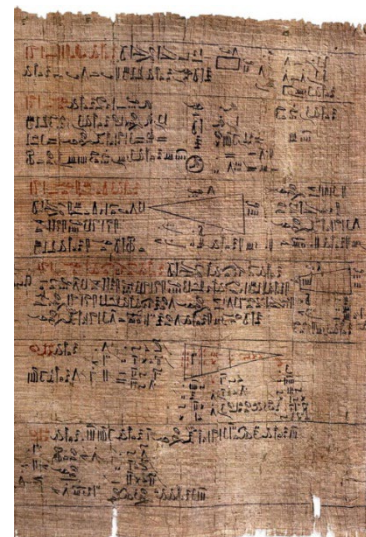
墨辩	三段论	因明学三支作法
孔子必有死， 因孔子是人。	凡人皆有死， 孔子是一个人， 故孔子必有死。	孔子必有死， 因孔子是一个人。 凡人皆有死，例如舜。

- 名家·公孙龙
 - **白马非马**：概念集合的相等和包含
 - **离坚白**：物体和物体属性的联系



逻辑的基础：古典几何

- 古埃及文明
 - 如何在尼罗河泛滥期间保持原有的土地边界
 - geo(地球) + metry (测量)
- 欧几里得
 - $\Sigma\tau\omicron\iota\chi\epsilon\acute{\iota}\alpha$, *Stoicheia*, 几何原本
 - **定义+公理 (公设) +定理**的理论体系



逻辑的基础：本体论

- 如何证明上帝的存在....

- 安瑟莫

- 上帝存在的本体论证明

“我思故我在”
“我”和“思”
自于上帝

单子本体论
(monadology)
上帝是最初的

基于模态逻辑
的本体论证明





南京大學

逻辑的起源

- 亚里士多德在编柏拉图学园的对话游戏的手册时注意到有些问题只能有特定的答案：

问：是不是所有人都是会死的？

答：是

问：苏格拉底是不是人？

答：是

问：苏格拉底是不是会死？

答：呃…

统治人类二千年的三段论

- 大前提：所有**人**都是**动物**
- 小前提：所有**逻辑学家**都是**人**
- 结论：所有**逻辑学家**都是**动物**

统治人类二千年的三段论

- 大前提：所有A都是B
- 小前提：所有C都是A
- 结论：所有C都是B

统治人类二千年的三段论

- 大前提：所有A都是B
- 小前提：有些A是C
- 结论：有些C都是B

Oops...



- 大前提：所有A都是B
- 小前提：有些C是B
- 结论：有些C都是A
- 所有逻辑学家都会死，有些兔子会死，推不出：有些兔子是逻辑学家。

统治人类二千年的三段论

- 语言：
 - "所有A是B"
 - "有些A是B"
 - "没有A是B"
 - "有些A不是B"
- 本质上通过这个模板生成：所有/有些 A 是/不是 B
- 结构：大前提(M, P), 小前提(S, M), 结论(S, P)
- 可能的（不等价）形式256个
 - 4个基本自明的“perfect”三段论
 - 一些转换规则从四个基本的推出所有24个有效的

统治人类二千年的三段论

- 扬·卢卡西维茨
 - 《亚里士多德的三段论》
 - 19个有效论式子，结论弱化的5个论式
 - “波兰表示法” 和 “逆波兰表示法”



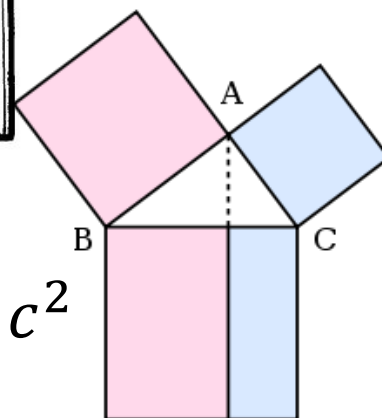
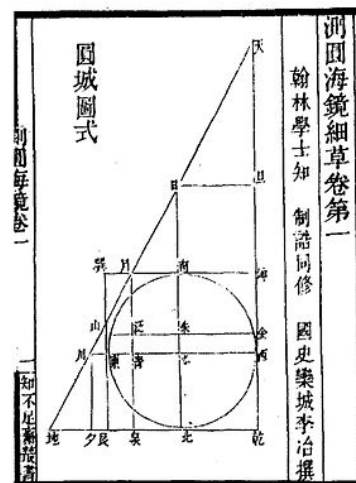
	aaa(<u>B</u> ar <u>b</u> ara)	eae(Ce <u>l</u> are <u>n</u> t)	a <i>ii</i> (Da <u>r</u> i <i>i</i>) — —	eio (Fe <u>r</u> io)
大前提	所有M是P	没有M是P	所有M是P	没有M是P
小前提	所有S是M	所有S是M	有些S是M	有些S是M
结论	所有S是P	没有S是P	有些S是P	有些S不是P

现代逻辑学的诞生

- 通过抽象符号描述对象和命题
 - 符号逻辑 (Symbolic Logic)
 - 语义+语法

- 抽象代数、集合论理论的发展

- 萌芽时代→代数时代→逻辑主义时代→元数学时代→
...



$$a^2 + b^2 = c^2$$

现代逻辑-萌芽时代

- 通用语言&通用数学

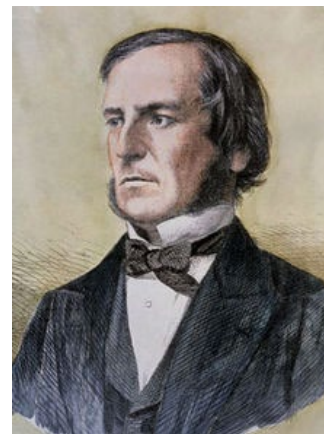
*The only way to rectify our reasonings is to **make them as tangible as those of the Mathematicians**, so that we can find our error at a glance, and when there are disputes among persons, we can simply say: **Let us calculate** , without further ado, to see who is right.*

-- G. W. Leibniz, The Art of Discovery(1685)



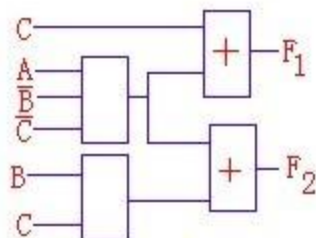
现代逻辑-代数时代

- **伽罗华**：开创研究抽象的公理化代数系统的抽象代数（1832）
 - 彻底解决了用根式求解代数方程的可能性问题
 - 解方程→代数结构的性质
- **布尔**：建立描述人类思维代数规律的布尔代数（1847-1854）



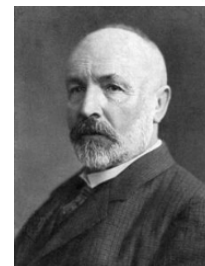
AE \ C	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	1	1	1	1

AE \ C	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	1	1	0



现代逻辑-逻辑主义时代

- **康托**: 建立**集合论**, 可用于表达整个数学的形式语言 (1872-1874)
- **弗雷格**: 严格建立第一个**人工的形式语言**概念文字 (1879)
- **皮亚诺**: 建立**算术的形式语言**皮亚诺算术 (1889)
- **策梅洛**: 建立第一个**公理化集合论**策梅洛集合论 (1908)
- **罗素**: 《数学原理》 (1910-1913)
 - 表述**所有数学真理**在一组数理逻辑内的公理和推理规则下, 原则上都是可以证明的

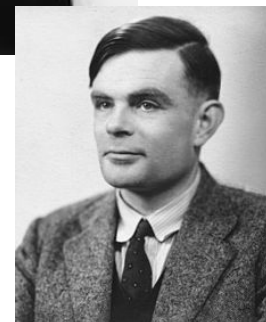




南京大學

现代逻辑-元数学时代

- **希尔伯特**：《几何基础》，《数学基础》，建立几何和数学的形式语言
 - 希尔伯特的23问
- **哥德尔**：哥德尔不完备定理
 - 包含皮亚诺算术的形式系统的**不完备性**
 - 包含皮亚诺算术的形式系统的**兼容性**，在该系统内**不可被证明**
- **邱奇**：什么是**可计算的**
 - 基于 **λ 演算**定义的可计算函数
- **图灵**：可对输入进行运算的理论机器模型**图灵机**



数理逻辑与计算机科学

- 数理逻辑的研究孕育了计算机科学...
 - 1928年，希尔伯特提出**判定性问题**：
 - 求一个算法，输入一个形式语言及其描述的一个数学陈述，输出对该陈述的正确判定
 - 1931年，哥德尔提出**不完全定理**
 - 1936年，图灵提出**图灵机**
 - 1937年，邱奇-图灵问题，**可计算性**
 - 1940年代，冯诺依曼提出**存储程序计算机结构**
 - 1946年2月14日，第一台图灵完全的电子计算机**ENIAC**正式公布



南京大學

数理逻辑与计算机科学

- 对编程语言的影响：
 - λ 演算 → 函数式编程语言 Lisp, Haskell
 - 一阶谓词逻辑 → 陈述式编程语言 Prolog, Datalog
 - 集合论 → 关系数据库查询语言 SQL
- 对软件系统理论的影响
 - 集合论 → 关系代数 → 现代数据库, 科德, 1981年图灵奖
 - 谓词逻辑 → 时序逻辑 → 现代分布式系统, 兰波特, 2013年图灵奖
- 对人工智能理论的影响
 - 基于推理: 专家系统, 费根鲍姆, 1994年图灵奖
 - 基于统计: 深度学习, 辛顿\本希奥\杨立昆, 2018年图灵奖



关于证明

- 本课程中的大多数问题都会要求您“证明”某事，即给出令人信服的解释为什么这件事是真的，尤其做到：
 - 通过**完整的、语法正确的句子**组成您的证明；
 - 证明中出现的所有变量**要么出现在被证明的陈述中**，要么在证明中的某处通过使用“**设/令/let**”等元语明确引入；
 - 每个陈述要么清楚地、合乎逻辑地**遵循先前的陈述**(并解释该逻辑)，要么以**明确的目的引入**(例如“假设矛盾...”或“归纳假设是...”);
 - **任何未被证明的东西都被引用**，通过它的通用名称(例如算术基本定理)或参考我们的教科书；



关于证明

- 证明的目的不是向**评分者说明您理解问题中的想法**，而是向具备相应数学/逻辑学基础，但是没有考虑过这个特定问题的其他人**解释您进行推理和论证的方案**。而在这个过程中，您只能写给他们，而不是说话。鉴于此：
 - 老师在讲课时写在黑板上的东西不构成书面证明，因为这些板书脱离老师说的东西就毫无意义；
 - 证明的评判标准在于评分者能否在预设前提下，仅仅通过书面文字就理解您的推理过程。因此**老师难免会出现难以理解某些证明步骤的情况**（即便这些步骤在您看来可能就像费马证明费马猜想一样精妙）。为了防止这种情况发生，在期中作业/期末考试后，您可以就您的分数提出异议，并来与老师一起进行证明的审查。