# 集合论

南京大学计算机科学与技术系

# 提要

- 基本概念
  - 集合及其描述
- 集合间的相互关系
  - 集合相等、子集关系
- 集合运算
  - 交并补
  - 文氏图

# 集合的定义

- 直观的定义
  - 一个集合是一组无序的对象，这些对象称为这个集合的元素或成员。
  - $a \in A$表示$a$是集合A的一个成员， $a \notin A$ 表示$a$不是A的成员。
- Georg Cantor的描述
  - [English translation] A set is a collection into a whole of definite, distinct objects of our intuition or our thought. The objects are called elements (member) of the set.

**Naïve set theory，朴素集合论**

# 集合的描述

- 穷举列表法：
  - $V=\{a, e, i, o, u\}$
  - $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
- 特性刻划法：
  - $\{x \mid P(x)\}$, P： 某种思维、观察中总结出的对象性质
    - $a\in\{x \mid P(x)\} \leftrightarrow P(a)$
  - 例：$Z^{+}=\{x\in Z \mid x>0\}$，$Q=\{p/q \mid p\in Z, q\in Z, q\neq 0\}$，
    - $[a, b]=\{x\in R \mid a\leq x\leq b\}$

# 集合的描述

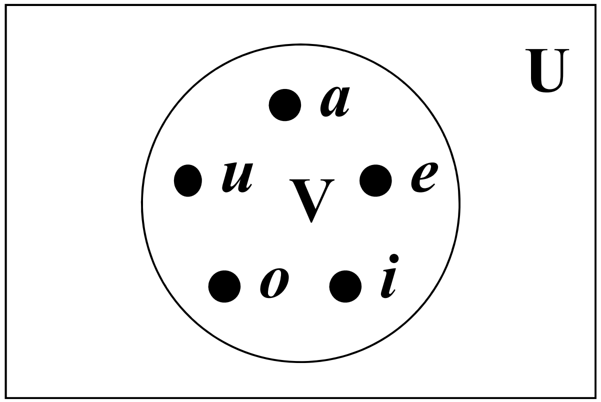
- 计算规则定义法：
  - 设$a_1=1, a_2=2$,
    当 $i>2$时，$a_{i+1}=a_i+a_{i-1}$

  则有：

  $S=\{a_k | k\in I^+\}=\{1,2,3,5,8,13, \ldots\ldots\}$

# 集合的描述

- 文氏图（Venn diagrams ）//John Venn
  - 文氏图是研究集合运算时的形象、直观工具。
  - 矩形内部表示全集，与它相关的集合均用圆形表示在矩形内。



# 特殊符号

- 本书中规定的几个表示特定集合的符号。
  - R:实数集合
  - Q:有理数集合
  - I : 整数集合
  - $I^+$: 正整数集合
  - N: 自然数集合 {0，1，2，……}
  - $N_m(m\geq 1)$:集合{0，1，……m-1}

# 集合的大小

- 有限集合及其基数
  - 若S恰有$n$个不同的元素，$n$是自然数，就说S是有限集合，而$n$是S的基数，记作$|S|=n$。
- 无限集合
  - 如果一个集合不是有限的，就说它是无限的。

# 集合相等、子集关系

- 定义：集合相等当且仅当它们有同样的元素
  - A=B 当且仅当 $\forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B)$ //外延原则
- 定义：集合A称为集合B的子集， 记作$A\subseteq B$
  - $\forall x\ (x\in A \rightarrow x\in B\ )$
  - 如果$A\subseteq B$, 但$A\neq B$，则A是B的真子集，记作$A\subset B$
- 定理：对任意集合A和B, A=B 当且仅当:
  - $A\subseteq B$, 且$B\subseteq A$

# 子集关系的一个性质

- 证明：如果X$\subseteq$Y且Y$\subseteq$Z, 则X$\subseteq$Z
- 要证明： “对任意的 $a$, 如果 $a\in$X, 则 $a\in$Z”
- 证明：
  - 对任意的 $a\in$X
  - 根据已知的 “X$\subseteq$Y”，可得：$a\in$Y
  - 根据已知的 “Y$\subseteq$Z”，可得：$a\in$Z
  - 所以，$\forall a\ (a\in X \rightarrow a\in Z)$, 即X$\subseteq$Z

# 空集

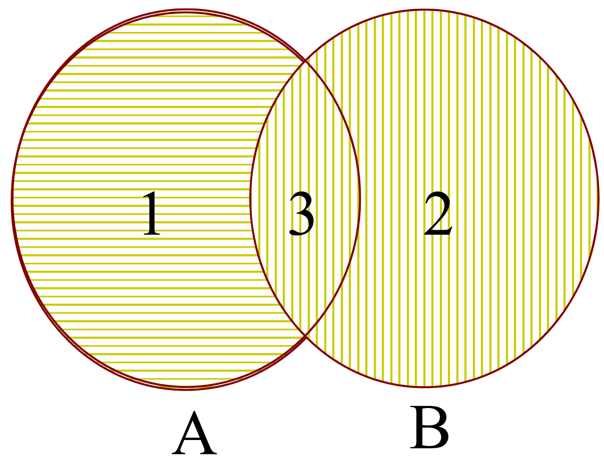
- 存在一个没有任何元素的集合：空集$\varnothing$
- 关于空集的一些性质：
  - 空集是任何集合的子集。
    - $\varnothing\subseteq A$，即 $\forall x(x\in\varnothing \rightarrow x\in A)$
  - 空集是唯一的，可以用 $\varnothing$表示
    - 如果 $\varnothing_1, \varnothing_2$都是空集，则 $\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$ 和 $\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$ 均为真

# 全集

- 如果所涉及的集合都是某个集合U的子集，则称U为全集。
  - 例：U可以是全体整数集合，自然数集合等等。

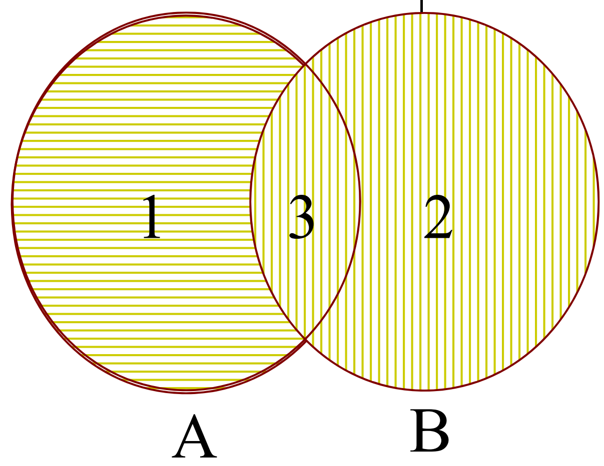
# 集合运算的定义

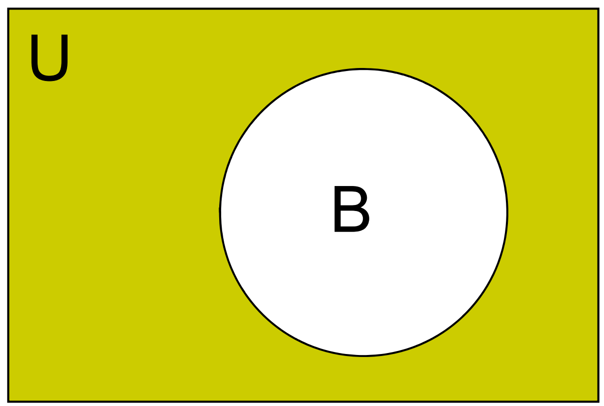
- 运算定义的基本方式：将结果定义为一个新的集合
  - 并：$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$
    - 并集: {1, 2 , 3}
  - 交： $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$
    - 交集: {3}



# 相对补（差）

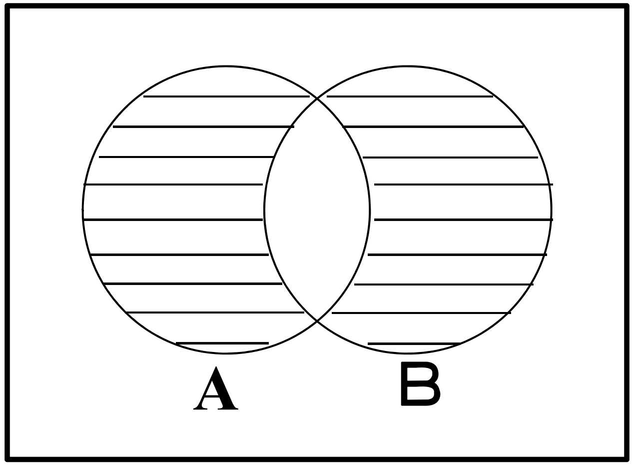
- B对于A的补集
  - $A\text{-}B=\{\ x \mid x \in A \wedge x \notin B\ \}$
- 举例，A-B={1}
- 全集U与B的差：U-B称为B的“补集”，记为~B
  - $x \in \sim B \leftrightarrow x \notin B$



# 对称差

- 对称差
  - $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$
- 证明: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$
  - $(A-B) \cup (B-A) \subseteq (A \cup B) - (A \cap B)$
  - $(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq (A-B) \cup (B-A)$



# 幂集

- S是一个集合，S的幂集是S的所有子集的集合
  - $\rho(S)=\{x| x \subseteq S\}$
- 举例
  - $\rho(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
  - $\rho(\varnothing) = \{\varnothing\}$

If $\rho(A) \subseteq \rho(B)$, then $A \subseteq B$

$\mathcal{P}(X)$

$\mathcal{P}(X)$

$\mathscr{P}(X)$

$\wp(X)$

$\mathbb{P}(X)$

$\mathrm{P}(X)$

# 关系

南京大学计算机科学与技术系

# 提要

- 二元关系
  - 关系的定义
  - 关系的表示
- 关系的性质
- 关系的运算
  - 关系的闭包
- 等价关系
- 偏序关系

# 有序对（Ordered pair）

- $(a, b)$是集合$\{\{a\}, \{a, b\}\}$的简写
- 次序的体现
  - $(x,y)=(u,v)$ iff $x=u$ 且 $y=v$

若$\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}$，则$\{x\}=\{u\}$或$\{x\}=\{u,v\}$, 因此$x=u$。

假设$y\neq v$

(1) 若$x=y$, 左边$=\{\{x\}\}$, 而$v\neq x$, $\therefore$右边$\neq\{\{x\}\}$;

(2) 若$x\neq y$,则必有$\{x,y\}=\{u,v\}$, 但$y$既非$u$,又非$v$, 矛盾。

# 笛卡尔乘积（Cartesian Product）

- 对任意集合$A$, $B$
  笛卡尔积 $A\times B = \{(a, b)|a\in A, b\in B\}$

- 例：$\{1,2,3\}\times\{a,b\} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$

- 若$A$，$B$是有限集合，$|A\times B| = |A|\times|B|$

# p.14 例2-1

- 令$A=\{1,2\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\varnothing$ 则
  - $A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c)(2,a),(2,b),(2,c)\}$
  - $B\times A=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$
  - $A\times C=\varnothing$

# （二元）关系的定义

- 若$A$, $B$是集合,从$A$到$B$的一个关系是$A\times B$的一个子集.
  - 集合, 可以是空集
  - 集合的元素是有序对

- 关系意味着什么?
  - 两类对象之间建立起来的联系!

# 从A到B的二元关系

- 笛卡尔乘积的子集
  - “从$A$到$B$的关系”$R$；$R \subseteq A \times B$
  - 若$A=B$： 称为“**集合$A$上的（二元）关系**”
- 例子
  - 常用的数学关系：不大于、整除、集合包含等
  - 网页链接、文章引用、相互认识

# 特殊的二元关系

- 集合A上的空关系$\varnothing$: 空关系即空集
- 全域关系 $E_A$: $E_A = \{ (x, y) \mid x, y \in A \}$
- 恒等关系 $I_A$ : $I_A = \{(x, x) \mid x \in A \}$

# 函数是一种特殊的关系

- 函数 $f: A \to B$
- $R = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$是一个从$A$到$B$的一个关系

# 关系的表示

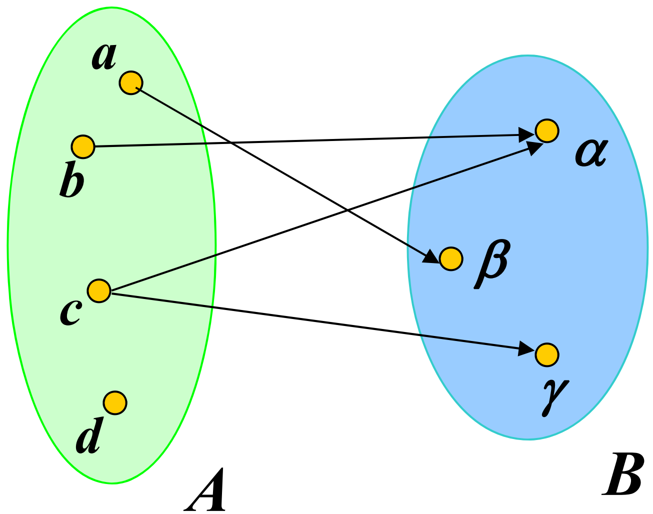
假设$A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ // 假设为有限集合

- 集合表示: $R_1=\{(a, \beta), (b, \alpha), (c, \alpha),(c, \gamma)\}$

0-1矩阵

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

有向图



# 二元关系和有向图

关系 $R \subseteq A \times B$ ⟷ 有向图 $(V_D, E_D)$

$A$和$B$是集合

有序对集合

$(x,y) \in R$

若$A=B$, $R$中存在序列：$(x_1,x_2)$, $(x_2,x_3)$,…,$(x_{n-1},x_n)$

顶点集 $V_D = A \cup B$

有向边集$E_D$

从$x$到$y$有一条边

图$D$中存在从 $x_1$ 到 $x_n$ 的长度为 $n$-1的通路

# 关系的性质：自反性 reflexivity

- 集合$A$上的关系 $R$ 是:
  - 自反的 reflexive：定义为：对所有的 $a\in A$, $(a,a)\in R$
  - 反自反的 irreflexive：定义为：对所有的$a\in A$, $(a,a)\notin R$

注意区分"非"与"反"

- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1), (1,3), (2,2), (2,1), (3,3)\}$ 是自反的
  - $\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ 是反自反的
  - $\{(1,2), (2,2), (2,3),( 3,1)\}$ 既不是自反的，也不是反自反的

# 自反性与恒等关系

- $R$ 是 $A$ 上的自反关系 $\Leftrightarrow$ $I_A \subseteq R$,

  这里$I_A$是集合A上的恒等关系,即: $I_A=\{(a,a)|\ a\in A\ \}$

  直接根据定义证明:

  - $\Rightarrow$ 只需证明:对任意$(a,b)$,若$(a,b)\in I_{\mathrm{A}}$, 则$(a,b)\in R$
  - $\Leftarrow$ 只需证明:对任意的$a$, 若$a\in A$, 则$(a,a)\in R$

# 关系的性质：对称性 Symmetry

- 集合$A$上的关系$R$是:
  - 对称的 symmetric：定义为：若 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R$
  - 反对称的 anti-~：定义为：若$(a,b)\in R$ 且$(b,a)\in R$ ，则$a=b$
- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,3)\}$ 是对称的
  - $\{(1,2),(2,3),(2,2),(3,1)\}$ 是反对称的

# 理解对称性

- 关系$R$满足对称性：对任意$(a,b)$，若 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R$

  关系R是对称的 $\Leftrightarrow \forall <a,b> (<a,b> \in R \Rightarrow <b,a> \in R)$

- 注意：$\varnothing$是对称关系。

- 反对称并不是对称的否定:

  (令：$A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$)

  - $\{(1,1),(2,2)\}$ 既是对称的，也是反对称的
  - $\varnothing$是对称关系，也是反对称关系。

# 对称性与逆关系

- $R$ 是集合$A$上的对称关系 $\Leftrightarrow R^{-1}=R$
  - $\Rightarrow$ 证明一个集合等式 $R^{-1}=R$
    - 若$(a,b)\in R^{-1}$, 则$(b,a)\in R$, 由$R$的对称性可知$(a,b)\in R$, 因此：$R^{-1}\subseteq R$; 同理可得：$R\subseteq R^{-1}$;
  - $\Leftarrow$ 只需证明：对任意的$(a,b)$ 若$(a,b)\in R$, 则$(b,a)\in R$

# 关系的性质：传递性 transitivity

- 集合$A$上的关系$R$是
  - 传递的 transitive: 若 $(a,b)\in$R, $(b,c)\in$R, 则 $(a,c)\in$R
- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ 传递的
  - $\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ 是非传递的
  - $\{(1,3)\}$?
  - $\varnothing$?

$$\text{关系R是传递关系} \Leftrightarrow \forall(a,b,c)(((a,b)\in R \wedge (b,c)\in R)\Rightarrow (a,c)\in R)$$

# 传递性与关系的乘幂

- 关系的复合(乘)运算满足结合律，可以用 $R^n$ 表示

  $R \circ R \circ \ldots \circ R \quad (n$是正整数$)$

- 命题：$(a,b) \in R^n$ 当且仅当：存在$t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \in A$, 满足：$(a,t_1),(t_1,t_2),\ldots,(t_{n-2},t_{n-1}),(t_{n-1},b) \in R$。
  - 对$n$>=1用数学归纳法：$n$=1, trivial. 奠基$n$=2,直接由关系复合的定义可得；归纳基于：$R^n = R^{n-1} \circ R$

- 集合$A$上的关系$R$是传递关系 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$
  - 必要性：$\Rightarrow$任取$(a,b) \in R^2$ ,根据上述命题以及R的传递性可得$(a,b) \in R$
  - 充分性：$\Leftarrow$ 若$(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$, 则$(a,c) \in R^2$, 由$R^2 \subseteq R$可得： $(a,c) \in R$，则 $R$是传递关系

# 一些常用关系的性质

| | $=$ | $\leq$ | $<$ | $\mid$ | $\equiv_3$ | $\varnothing$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 自反 | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ |
| 反自反 | ✗ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✓ | ✗ |
| 对称 | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 反对称 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | ✗ |
| 传递 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |

# 关系运算与性质的保持

| | 自反 | 反自反 | 对称 | 反对称 | 传递 |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_1^{-1}$ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| $R_1 \cap R_2$ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| $R_1 \cup R_2$ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ |
| $R_1 \circ R_2$ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ |

# 关系的运算（1）

- 关系是集合, 所有的集合运算对关系均适用
  - 例子:
    - 自然数集合上: “<” ∪ “=” 等同于 “≤”
    - 自然数集合上: “≤” ∩ “≥”等同于“=”
    - 自然数集合上: “<” ∩ “>”等同于∅

# 关系的运算（2）

- 与定义域和值域有关的运算
  - $\mathrm{dom}\, R = \{x \mid \exists y\, (x,y)\in R\}$
  - $\mathrm{ran}\, R = \{y \mid \exists x\, (x,y)\in R\}$
  - $R\uparrow A = \{(x,y) \mid x\in A \wedge xRy\} \subseteq R$
  - $R[A] = \{y \mid \exists x\, (x\in A \wedge (x,y)\in R)\} = \mathrm{ran}(R\uparrow A) \subseteq \mathrm{ran}R$
- 例：$A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,3,5,6\}$, $A$上关系$R$：

  $R=\{(1,2), (1,4),(2,3),(3,5),(5,2)\}$,

  求 $R\uparrow B$、$R[B]$、$R(1)$和$R(2)$

# 关系的运算（3）

- 逆运算
  - $R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y,x) \in \mathrm{R} \}$
    - 注意:如果$R$是从$A$到$B$的关系,则$R^{-1}$是从$B$到$A$的。
  - $(R^{-1})^{-1} = R$
  - 例子：$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$
    - $(x, y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in (R_1 \cup R_2)$
    - $\Leftrightarrow (y, x) \in R_1$ 或 $(y, x) \in R_2$
    - $\Leftrightarrow (x, y) \in R_1^{-1}$ 或 $(x, y) \in R_2^{-1}$

# 关系的运算（4）

- 关系的复合（合成, Composition）

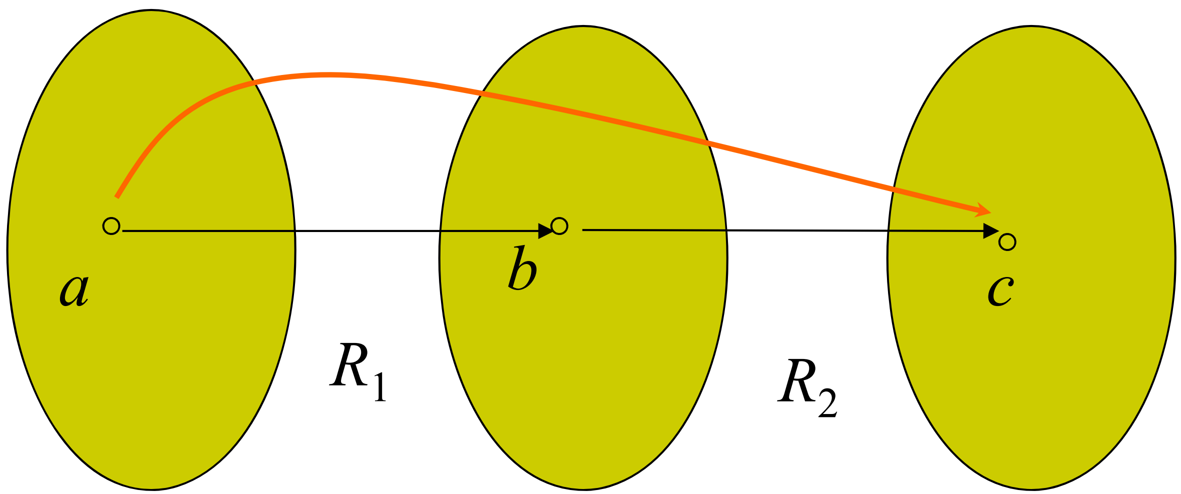
  设 $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$,

  $R_1$与$R_2$的复合（合成），记为 $R_2 \circ R_1$, 定义如下：

  $R_2 \circ R_1 = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B\ ((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2)\}$

# 复合关系的图示

- $(a, c) \in R_2 \circ R_1$ 当且仅当 $a \in A, c \in C$, 且存在$b \in B$, 使得$(a, b) \in R_1$, $(b,c) \in R_2$



# 关系的复合运算：举例

- 设$A=\{a, b, c, d\}$, $R_1$, $R_2$为$A$上的关系，其中：

  $R_1 = \{ (a, a), (a, b), (b, d)\}$

  $R_2 = \{(a, d), (b, c), (b, d), (c, b)\}$

则：

$R_2 \circ R_1 = \{(a, d), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 \circ R_2 = \{(c, d)\}$

$R_1^{\,2} = \{(a, a), (a, b), (a, d)\}$

# 关系的复合运算的性质（1）

- 结合律
  - 给定$R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, $R_3 \subseteq C \times D$, 则：

$$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$

- 证明左右两个集合相等.

# 关系的复合运算的性质（2）

- 复合关系的逆关系
  - 给定$R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, 则：

$$(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$$

- 同样，证明左右两个集合相等
  - $(x, y) \in (R_2 \circ R_1)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R_2 \circ R_1 \Leftrightarrow$

$$\exists t \in B \ \ ((y, t) \in R_1 \wedge (t, x) \in R_2) \Leftrightarrow$$

$$\exists t \in B \ ((t, y) \in R_1^{-1} \wedge (x, t) \in R_2^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$(x, y) \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$$

# 关系的复合运算的性质（3）

- 对集合并运算满足分配律
  - 给定$F\subseteq A\times B$, $G\subseteq B\times C$, $H\subseteq B\times C$, 则：

    $(G\cup H)\circ F = (G\circ F)\cup(H\circ F)$
- 对集合交运算：$(G\cap H)\circ F\subseteq(G\circ F)\cap(H\circ F)$
  - 注意：等号不成立。

    $A=\{a\}$, $B=\{s,t\}$, $C=\{b\}$;

    $F=\{(a,s),(a,t)\}$, $G=\{(s,b)\}$, $H=\{(t,b)\}$;

    $G\cap H=\varnothing$, $(G\circ F)\cap(H\circ F)=\{(a,b)\}$

# 关系的闭包：一般概念

- 设$R$是集合A上的关系，P是给定的某种性质（如：自反、对称、传递），满足下列所有条件的关系$R_1$称为R的关于P的闭包:
  - $R \subseteq R_1$
  - $R_1$ 满足性质P
  - 如果存在集合$A$上的关系$R'$，$R'$满足性质P 并包含$R$，则$R_1 \subseteq R'$
- 自反闭包r(R)、对称闭包s(R)、传递闭包t(R)

# 自反闭包的定义

- 设 $R$的是集合$A$上的关系，其自反闭包$r(R)$也是$A$上的关系，且满足：
  - $r(R)$满足自反性；
  - $R \subseteq r(R)$;
  - 对$A$上的任意关系$R'$, 若$R'$也满足自反性，且也包含$R$，则$r(R) \subseteq R'$
- 例子
  - 令A={1,2,3}, $R$={(1,1), (1,3), (2,3), (3,2)}。则$r(R)$={(1,1), (1,3), (2,3), (3,2), (2,2), (3,3)}。

# 自反闭包的计算公式

- $r(R) = R \cup I_A$, $I_A$是集合$A$上的恒等关系

  (证明所给表达式满足自反闭包定义中的三条性质)

  1. 对任意 $x \in A$, $(x,x) \in I_A$, 因此, $(x,x) \in R \cup I_A$
  2. $R \subseteq R \cup I_A$
  3. 设 $R'$ 集合$A$ 上的自反关系，且$R \subseteq R'$, 则对任意 $(x,y) \in R \cup I_A$, 有$(x,y) \in R$, 或者 $(x,y) \in I_A$。对两种情况，均有 $(x,y) \in R'$, 因此, $R \cup I_A \subseteq R'$

# 对称闭包的计算公式

- $s(R) = R \cup R^{-1}$, 这里$R^{-1}$是$R$的逆关系
  - $s(R)$是对称的。对任意 $x,y \in A$, 如果 $(x,y) \in s(R)$, 则$(x,y) \in R$ 或者$(x,y) \in R^{-1}$, 即$(y,x) \in R^{-1}$, 或者 $(y,x) \in R$, $\therefore$ $(y,x) \in s(R)$
  - $R \subseteq s(R)$
  - 设$R'$是集合$A$上的对称关系, 并且$R \subseteq R'$, 则对任意$(x,y) \in s(R)$, 有$(x,y) \in R$, 或者$(x,y) \in R^{-1}$.
    - 情况1: $(x,y) \in R$, 则 $(x,y) \in R'$
    - 情况2: $(x,y) \in R^{-1}$, 则 $(y,x) \in R$, 于是 $(y,x) \in R'$。根据$R'$的对称性: $(x,y) \in R'$

  因此, $s(R) \subseteq R'$

# 连通关系

- R是集合A上的关系
- 定义集合A上的“R连通”关系$R^*$如下：
  - 对任意$a,b\in A$, $a\ R^* b$ 当且仅当：存在$t_1,t_2\ldots t_k \in A$($k$是正整数)，满足$(a,t_1) \in R$; $(t_1,t_2)\in R$;…; $(t_k,b)\in R$。(可以表述为：从$a$到$b$之间存在长度至少为1的通路)
  - 显然：对任意$a,b\in A$, $a\ R^*b$ 当且仅当存在某个正整数$k$, 使得$aR^kb$。
  - 于是：$R^* = R^1\cup R^2\cup R^3\cup\ldots R^i\cup\ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$

# 传递闭包

$t(R) = R^*$

1. 若 $(x,y) \in R^*, (y,z) \in R^*$, 则有 $s_1, s_2, \ldots, s_j$ 以及 $t_1, t_2, \ldots, t_k$,

满足: $(x,s_1), \cdots, (s_j, y), (y, t_1), \cdots, (t_k, z) \in R$,

因此, $(x,z) \in R^*$.

2. $R \subseteq R^*$

3. 设 $R'$ 是集合 $A$ 上的传递关系, 且包含 $R$。若 $(x,y) \in R^*$,

则有 $t_1, t_2, \ldots, t_k$, 满足: $(x,t_1), \cdots, (t_k, y) \in R$,

于是 $(x,t_1), (t_1,t_2), \cdots, (t_k, y) \in R'$

根据 $R'$ 的传递性, $(x,y) \in R'$.

# 利用公式证明闭包相等

- 证明：$r(s(R)) = s(r(R))$
  - $r(s(R)) = r(R \cup R^{-1})$

$$
\begin{aligned}
r(s(R)) &= r(R \cup R^{-1}) \\
&= (R \cup R^{-1}) \cup I_A \\
&= (R \cup I_A) \cup (R^{-1} \cup I_A^{-1}) \quad \text{(注意：} I_A = I_A^{-1}\text{, 并用等幂率)} \\
&= (R \cup I_A) \cup (R \cup I_A)^{-1} \\
&= s(R \cup I_A) \\
&= s(r(R))
\end{aligned}
$$

注意：$r(s(R))$一般省略为$rs(R)$

# 等价关系的定义

- 满足性质：自反、对称、传递。
- “等于”关系的推广
- 例子
  - 对3同余关系: $R\subseteq Z\times Z$， $xRy$ 当且仅当 $\frac{|x-y|}{3}$ 是整数。
  - $R\subseteq N\times N$， $xRy$ iff 存在正整数$k,l$，使得$x^k=y^l$。
    - 自反: 若$x$是任意自然数，当然$x^k=x^k$；
    - 对称：若有$k,l$, 使$x^k=y^l$；也就有$l,k$, 使$y^l=x^k$；
    - 传递：若有$k,l$, 使$x^k=y^l$；并有$m$, n, 使$y^n=z^m$；则有 $x^{kn}=z^{ml}$

# 等价类

- $R$是非空集合A上的等价关系，$\forall x \in$A，等价类$[x]_R = \{y \mid y \in \text{A} \land xRy\}$
- 每个等价类是A的一个非空子集。
- 例子：对3同余关系: $R \subseteq Z \times Z$， $xRy$ 当且仅当 $\frac{|x-y|}{3}$ 是整数。
  - ３个等价类： $[0]=\{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$;

    $[1]=\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$;

    $[2]=\{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$

# 等价类的代表元素

- 对于等价类$[x]_R=\{\ y \mid y\in A \wedge xRy\ \}$，$x$称为这个等价类的代表元素.
- 其实，该等价类的每个元素都可以做代表元素：若$xRy$，则$[x]=[y]$
  - 证明：对任意元素$t$, 若$t\in[x]$, 则$xRt$, 根据$R$的对称性与传递性，且$xRy$, 可得$yRt$, 因此 $t\in[y]$, $\therefore [x]\subseteq[y]$; 同理可得$[y]\subseteq[x]$ 。

# 商集

- $R$是非空集合$A$上的等价关系，$\forall x \in A$，则其所有等价类的集合称为商集，$A/R$
- 集合$A=\{a_1,a_2, \ldots, a_n\}$上的恒等关系$I_A$是等价关系，商集$A/I_A=\{\{a_1\}, \{a_2\},\ldots, \{a_n\}\}$
- 定义自然数集的笛卡儿乘积上的关系$R$:

$$(a, b)R(c,d) \text{ 当且仅当 } a+d=b+c$$

证明这是等价关系，并给出其商集.

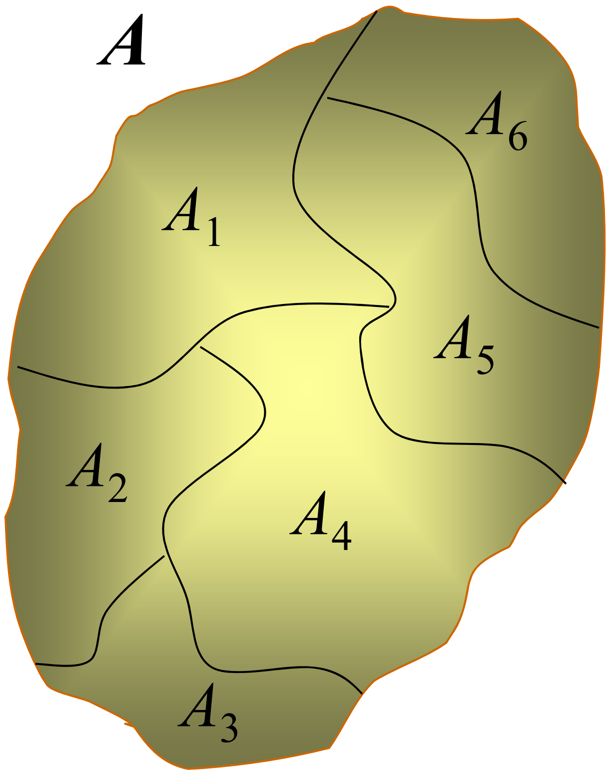
# 等价关系的一个例子

- $R_1,R_2$分别是集合$X_1,X_2$上的等价关系。定义$X_1\times X_2$上的关系$S$：

$$(x_1,x_2)S\,(y_1,y_2) \text{ 当且仅当 } x_1R_1y_1 \text{ 且 } x_2R_2y_2$$

- 证明：$S$是$X_1\times X_2$上的等价关系
  - [自反性] 对任意$(x,y)\in X_1\times X_2$, 由$R_1,R_2$满足自反性可知， $(x,x)\in R_1$, $(y,y)\in R_2$; $\therefore$ $(x,y)S(x,y)$; $S$自反。
  - [对称性] 假设$(x_1,x_2)S\,(y_1,y_2)$, 由$S$的定义以及$R_1,R_2$满足对称性可知： $(y_1,y_2)S\,(x_1,x_2)$; $S$对称。
  - [传递性] 假设$(x_1,x_2)S\,(y_1,y_2)$, 且$(y_1,y_2)S\,(z_1,z_2)$, 则$x_1R_1y_1$, $y_1R_1z_1$, $x_2R_2y_2$, $y_2R_2z_2$, 由$R_1,R_2$满足传递性可知：$x_1R_1z_1$, 且$x_2R_2z_2$, 于是：$(x_1,x_2)S\,(z_1,z_2)$; $S$传递。

# 集合的划分




集合A的 划分, $\pi$, 是A的一组非空子集的集合，即 $\pi \subseteq \rho(A)$, 且满足：

1. 对任意 $x \in A$, 存在某个 $A_i \in \pi$, 使得 $x \in A_i$.

$$\text{i.e. } \bigcup_i A_i = A$$

2. 对任意 $A_i, A_j \in \pi$, 如果 i≠j, 则：

$$A_i \cap A_j = \phi$$

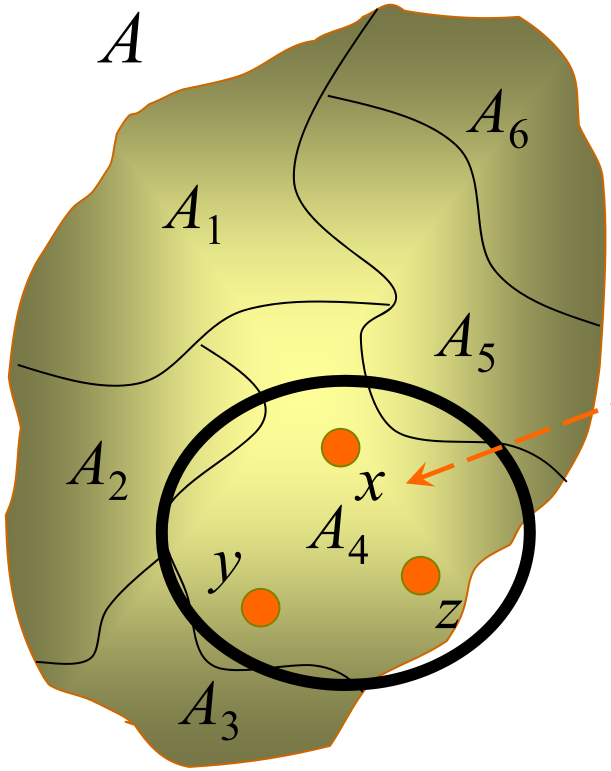
# 由等价关系定义的划分

- 假设$R$是集合$A$上的等价关系，给定$a\in A$, $R(a)$是由$R$ 所诱导的等价类。
- $Q=\{R(x)|x\in A\}$是相应的商集。
- 容易证明，这样的商集即是$A$的一个划分：
  - 对任意 $a\in A$, $a\in R(\mathrm{a})$ ($R$ 是自反的)
  - 对任意 $a,b\in A$
    - $(a,b)\in R$ 当且仅当 $R(a)=R(b)$, 同时
    - $(a,b)\notin R$ 当且仅当 $R(a)\cap R(b)=\varnothing$

# 商集即划分– 证明

- 不相等的等价类必然不相交。换句话说，有公共元素的任意两个等价类必然相等。
- 证明：
  - 假设$R(a) \cap R(b) \neq \varnothing$, 设$c$是一个公共元素。
  - 根据等价类的定义，$(a,c) \in R$, $(b,c) \in R$
  - 对任意$x \in R(a)$, $(a,x) \in R$, 由R的传递性和对称性，可得$(c,x) \in R$, 由此可知$(b,x) \in R$, 即$x \in R(b)$, $\therefore R(a) \subseteq R(b)$
  - 同理可得：$R(b) \subseteq R(a)$。因此: $R(a)=R(b)$

# 根据一个划分定义等价关系




给定 A 上一个划分，可以如下定义A 上的等价关系 $R$ :

$\forall x,y\in A, (x,y)\in R$ 当且仅当:

$x,y$ 属于该划分中的同一块。

显然，关系 $R$ 满足自反性、对称性、传递性。因此：$R$ 是等价关系。

# 利用等价类解题：

- 证明：

从1,2,...,2000中任取1001个数，其中必有两个数x,y，满足$x/y=2^k$。

(k为整数)。

想起鸽笼原理没？

# 等价关系与划分：一个例子-解

- 建立1000个集合，每个集合包括1至2000之间的一个奇数以及该奇数与2的k次幂的乘积，但最大不超过2000。可以证明这1000个集合的集合是集合{1,2,3,..., 2000}上的一个划分。注意任意两个1到2000之间的正整数x,y在同一划分块中当且仅当$x/y=2^k$。(k为整数)。
- 定义集合{1,2,3,..., 2000}上的一个关系$R$，任意x,y，$xRy$当且仅当$x/y=2^k$。易证这是一个等价关系。其商集即上面的划分。

# 相容关系与覆盖

- 如果R是自反的和对称的，则称R是A上的相容关系。
  - R的最大相容类B满足：
    - 任一$x \in B$,都与B中所有其它的元素有相容关系。
    - A-B中没有与B中所有元素有相容关系的元素。
- 相容关系R的最大相容类的集合称为A的完全覆盖

# 偏序关系(Partial Order)

- 定义（偏序关系）：非空集合$A$上的自反、反对称和传递的关系称为$A$上的偏序关系，记为：$\preccurlyeq$
- 设$\preccurlyeq$为偏序关系，若$(a,b)\in\preccurlyeq$，则记为$\boldsymbol{a\preccurlyeq b}$，读作“$a$小于或等于$b$”

实例

集合 $A$ 上的恒等关系 $I_A$ 是 $A$ 上的偏序关系.

小于或等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

# 偏序关系（续）

定义： 设 $R$ 为非空集合 $A$ 上的偏序关系，

$x,y \in A$, $x$ 与 $y$ 可比 $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$.

任取两个元素 $x$ 和 $y$，可能有下述几种情况发生：

$x \prec y$(或 $y \prec x$)，　$x=y$，　$x$ 与 $y$ 不是可比的.

定义： $R$ 为非空集合 $A$ 上的偏序关系，

$\forall x,y \in A$, $x$ 与 $y$ 都是可比的，则称 R 为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义： $x,y \in A$，如果 $x \prec y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$，则称 $y$ 覆盖 $x$.

例如{1,2,4,6}集合上的整除关系，2 覆盖 1，4 和 6 覆盖 2. 但 4 不覆盖 1.

# 偏序集(poset)与哈斯图

1．偏序集

定义：集合 $A$ 和 $A$ 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 一起叫做偏序集，记作 $(A,\preccurlyeq)$.

实例：

整数集合 $Z$ 和数的小于或等于关系 $\leq$ 构成偏序集 $(Z,\leq)$

集合 $A$ 的幂集 $P(A)$ 和包含关系 $R_{\subseteq}$ 构成偏序集 $(P(A),R_{\subseteq})$.

2．哈斯图

利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

特点：

- 每个结点没有环
- 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前
- 具有覆盖关系的两个结点之间连边

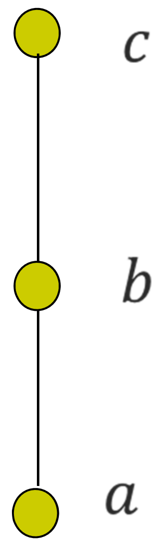
# 偏序集（续）

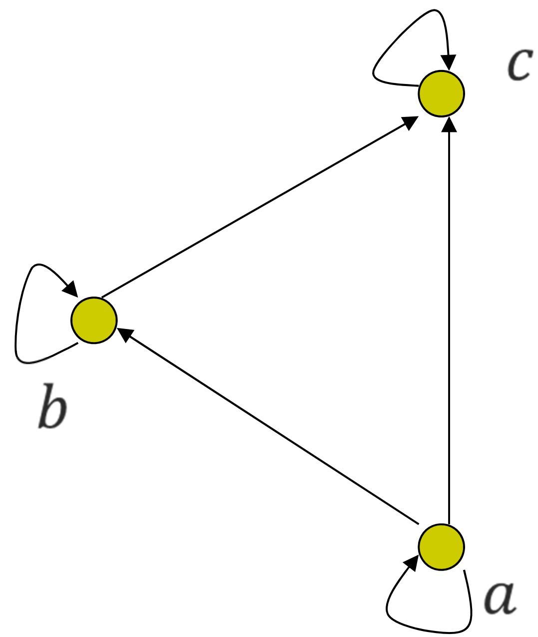
- 例：字典序(lexicographic order)与偏序集
  - 给定两个偏序集 $(A, \preccurlyeq_A)$与 $(B, \preccurlyeq_B)$，在 $A \times B$ 上定义新关系“$\preccurlyeq$”：
    $(a, b) \preccurlyeq (c, d) \Leftrightarrow a \prec c \vee (a = c \wedge b \preccurlyeq d)$

- 易证，$(A \times B, \preccurlyeq)$ 是一个偏序集。

# 哈斯图

- 将偏序关系简化为哈斯图：
  - 省略所有顶点上的环
  - 省略所有因传递关系而引出的边
  - 根据箭头的方向自下而上重排列所有顶点，而后将所有的有向边替换为无向边



# 哈斯图的例子

例 偏序集$(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R_{整除})$和$(P(\{a,b,c\}),R_{\subseteq})$的哈斯图.

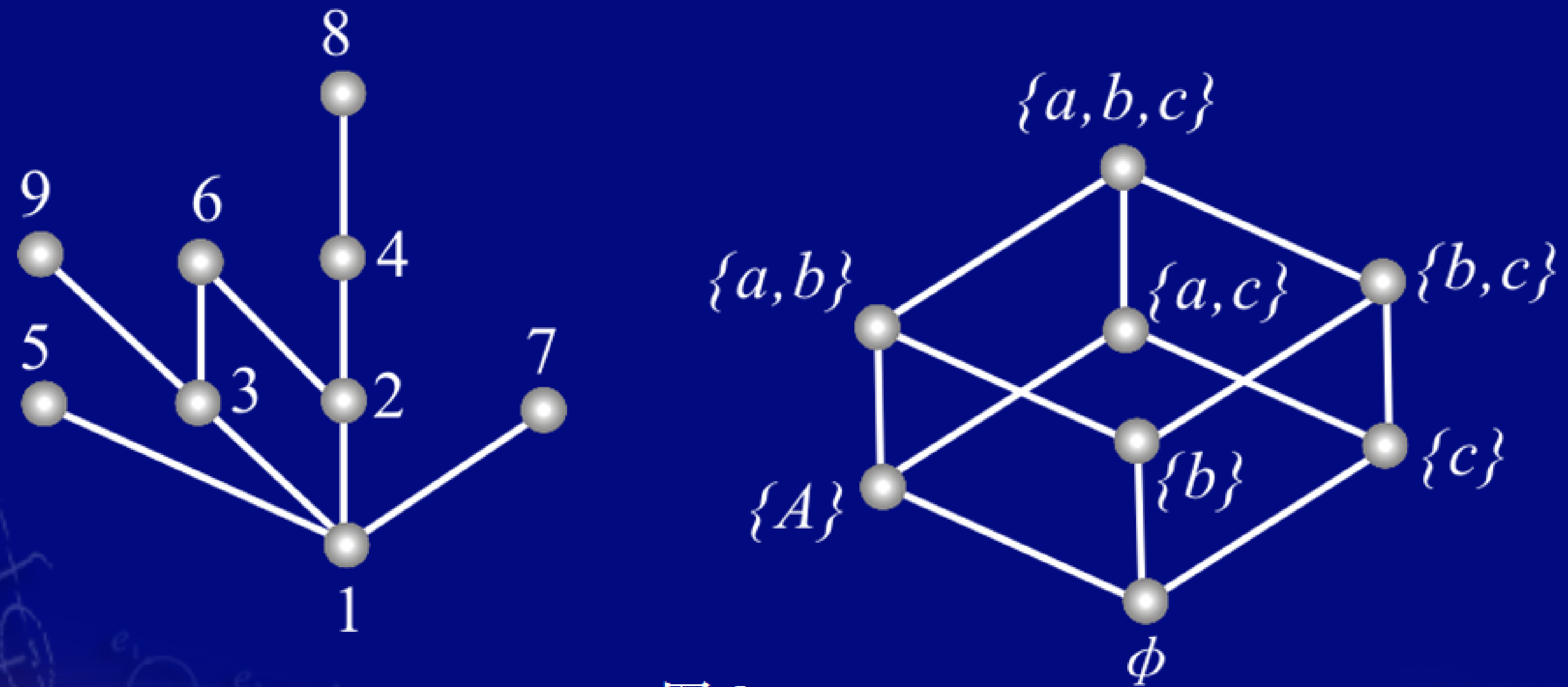



图 8

# 偏序集中的特殊元素及其性质

1. 最小元、最大元、极小元、极大元

定义： 设 $(A,\preccurlyeq)$ 为偏序集，$B\subseteq A$，$y\in B$.

(1) 若 $\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$ 成立，则称 $y$ 为 $B$ 的最小元.

(2) 若 $\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 成立，则称 $y$ 为 $B$ 的最大元.

(3) 若 $\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$ 成立，则称 $y$ 为 $B$ 的极小元.

(4) 若 $\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$ 成立，则称 $y$ 为 $B$ 的极大元.

性质：

- 对于有穷集，极小元和极大元一定存在，还可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元，也是极大元.

# 偏序集中的特殊元素及其性质（续）

2．下界、上界、下确界（最大下界）、上确界（最小上界）

定义：设$(A, \preccurlyeq)$为偏序集，$B \subseteq A$，$y \in A$.

（1）若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$成立，则称 $y$ 为 $B$ 的上界.

（2）若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$成立，则称 $y$ 为 $B$ 的下界.

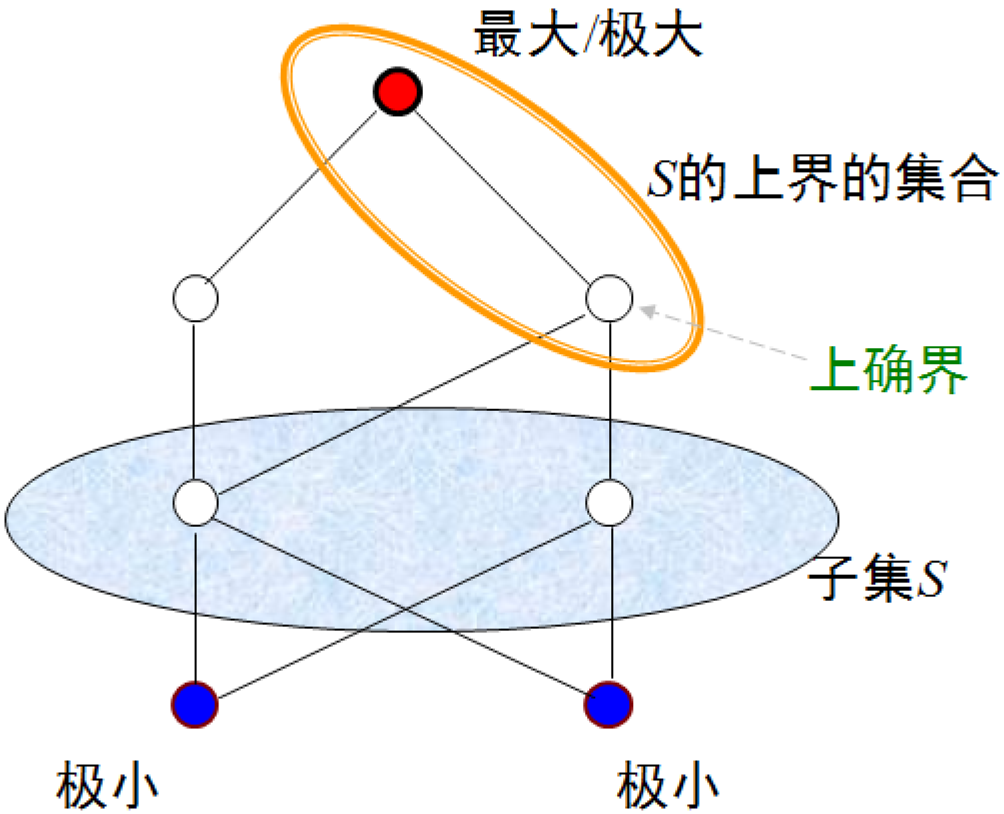
（3）令 $C = \{y \mid y$ 为 $B$ 的上界$\}$，则称 $C$ 的最小元为 $B$ 的最小上界或上确界.

（4）令 $D = \{y \mid y$ 为 $B$ 的下界$\}$，则称 $D$ 的最大元为 $B$ 的最大下界或下确界.

性质：

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在，则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

# 从哈斯图看特殊元素



# 偏序集中的特殊元素及其性质（续）

例 设偏序集$(A,\preccurlyeq)$如下图所示，

求$A$的极小元、最小元、极大元、最大元.

设$B=\{b,c,d\}$，求$B$的下界、上界、下确界、上确界.

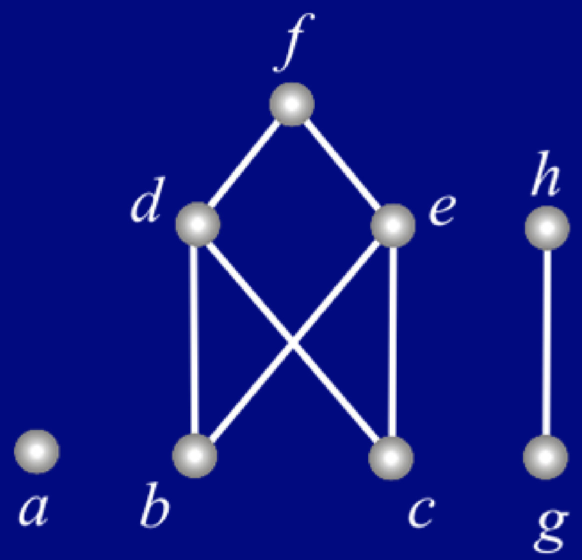



图 10

解 极小元：$a, b, c, g$；　极大元：$a, f, h$；没有最小元与最大元.

$B$的下界和最大下界都不存在，上界有$d$和$f$，最小上界为$d$.

# 偏序集中的特殊元素及其性质（续）

4．设偏序集（$A, R$）的哈斯图如图所示.

（1）写出 $A$ 和 $R$ 的集合表达式

（2）求该偏序集中的

极大元

极小元

最大元

最小元

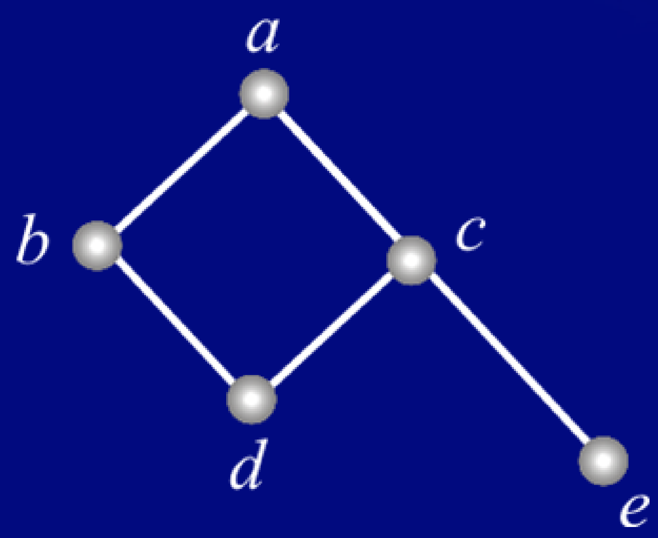



图11

解 （1）$A=\{a, b, c, d, e\}$

$R=\{(d,b), (d,a), (d,c), (e,c), (e,a), (b,a), (c,a)\}\cup I_A$

（2）极大元和最大元是 $a$，极小元是 $d, e$；没有最小元.

# 函数

南京大学计算机科学与技术系

# 提要

- 函数的基本概念
- 函数的性质（特殊函数）
- 函数的复合
- 反函数（逆函数）

# 函数(function)的定义

- 设 A 和 B 为非空集合，从集合A到B的函数 $f$ 是对元素的一种指派，对A的每个元素恰好指派B的一个元素。记作 $f$:A→B。
  - Well defined(良定义)
  - $f$:A→B：函数的型构
  - $f$的定义域（domain）是A，$f$的伴域（codomain）是B
  - 如果 $f$ 为A中元素$a$指派的B中元素为$b$，就写成 $f(a)=b$。此时，称 $b$是$a$的像，而$a$是$b$的一个原像。
  - A中元素的像构成的集合称为$f$的值域 range （$f$的像 image）。
- 函数也称为映射(mapping)或变换(transformation)

# 函数是一种特殊的关系

- $A$ 和 $B$ 为非空集合, 若关系 $R \subseteq A \times B$ 满足
  - 对于$A$ 中的每个元素 $a$，$B$ 中都有且仅有一个元素 $b$ 使得 $aRb$

则 $R$ 是一个从 $A$ 到 $B$ 的函数。

如何用逻辑公式表达上述条件？

# 函数举例

- F1={(a1,b1), (a2,b1), (a3,b2)}是函数

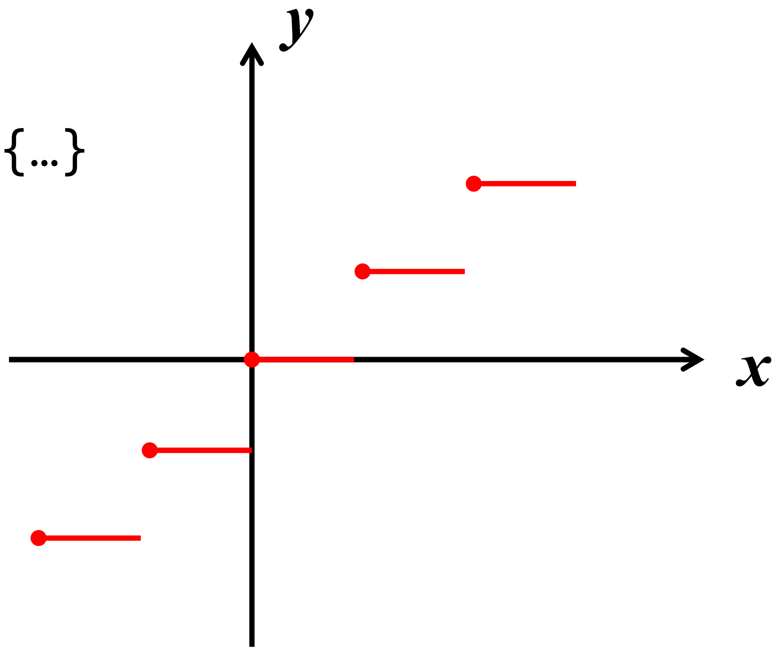
- F2={(a1,b1),(a1,b2),(a2,b1),(a3,b2)}不是函数

# 函数举例

- 下取整函数 $\lfloor x \rfloor$: R $\rightarrow$ Z

```
Java Program
int  floor(float real) {…}
```

```
floor: float → int
```




- 函数 $f$ 的图像: $\{(a, b) \mid a \in \mathrm{A} \wedge f(a)=b\}$

# 函数举例

- 某课程成绩

Program

`CourseGrade  grade(StudentName sname, CourseName cname) {…}`

函数原型

Function:

`Grade: StudentName ×CourseName→ CourseGrade`

函数型构
(signature)

| 姓名 | 课程 | 成绩 |
|---|---|---|
| 张明 | 离散数学 | A |
| 李宁 | 程序设计 | B |
| 王琴 | 数据结构 | A |
| … | … | … |
| | | |

# 函数举例

- 设$A$为非空集合，$A$上的 恒等函数$\iota_A:A\to A$定义为
  - $\iota_A(x)=x$， $x\in A$
- 设 $U$ 为非空集合， 对任意的 $A\subseteq U$， 特征函数 $\chi_A:U\to\{0,1\}$ 定义为：
  - $\chi_A(x)=1$， $x\in A$
  - $\chi_A(x)=0$， $x\in U-A$

如果要记录每节离散数学课的到课情况？

# 函数(function)的相等

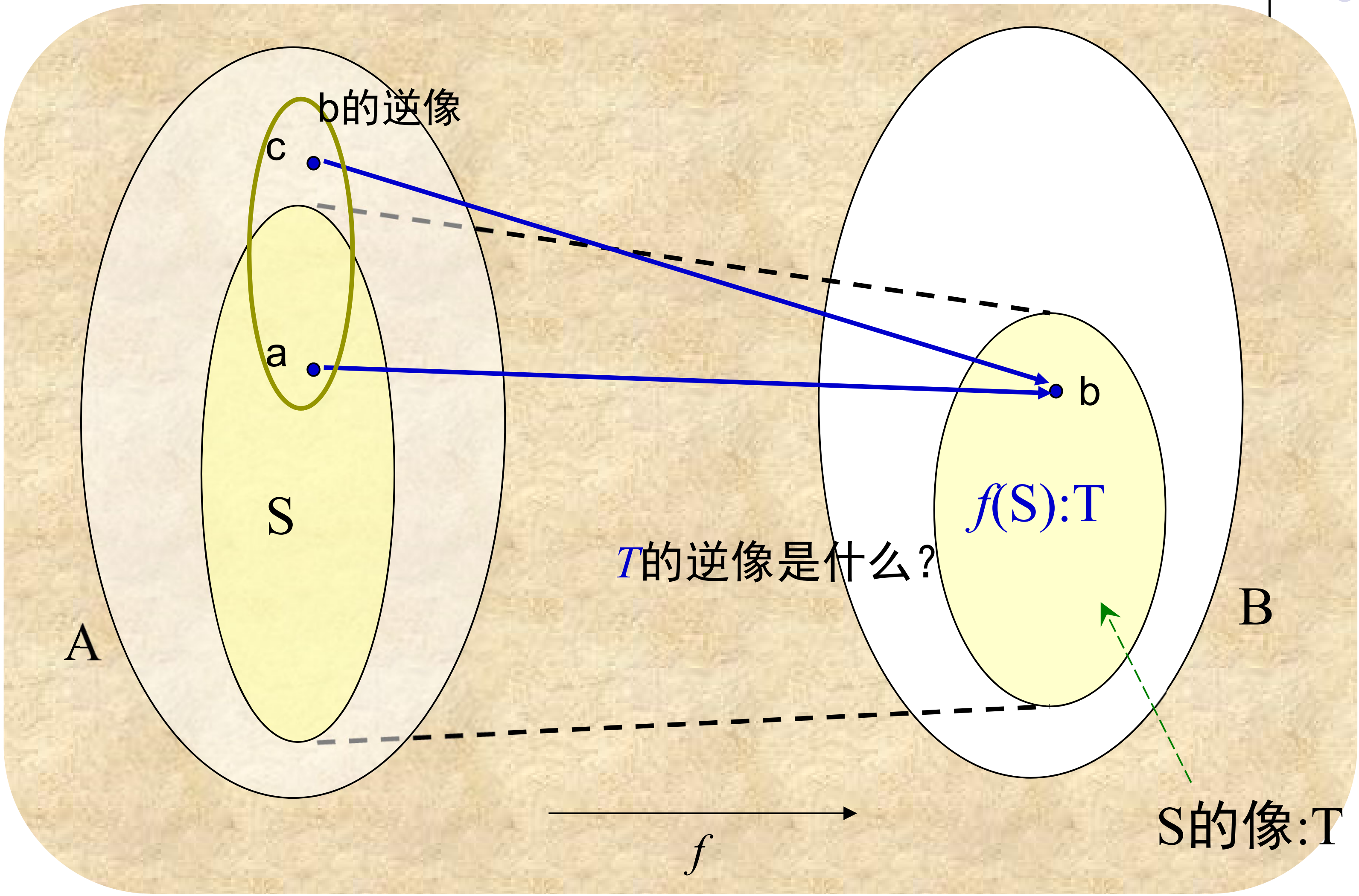
- 函数相等 $f$=$g$ if
  - dom($f$)=dom($g$)
  - codom($f$)=codom($g$)
  - $\forall x(x\in \mathrm{dom}(f) \rightarrow f(x)=g(x))$

# 子集在函数下的像

- 设 $f$ 是从集合$A$到$B$的函数，$S$ 是$A$的一个子集。$S$ 在 $f$ 下的像，记为$f(S)$，定义如下：
  - $f(S) = \{t | \exists_{s \in S} t = f(s)\}$

- 备注：$f(A)$ 即为 $f$ 的值域。

# S的像和逆像



# 并集的像

- 设函数 $f$: A→B，且X，Y是A的子集，则

$$f(X\cup Y) = f(X)\cup f(Y)$$

- 证明:
  - $f(X\cup Y) \subseteq f(X)\cup f(Y)$

    对任意的t，若$t\in f(X\cup Y)$ , 则存在$s\in X\cup Y$, 满足$f(s)=t$; 假设 $s\in X$, 则$t\in f(X)$, 假设$s\in Y$, 则$t\in f(Y)$, $\therefore t\in f(X)\cup f(Y)$
  - $f(X)\cup f(Y) \subseteq f(X\cup Y)$

    对任意的t，若$t\in f(X)\cup f(Y)$

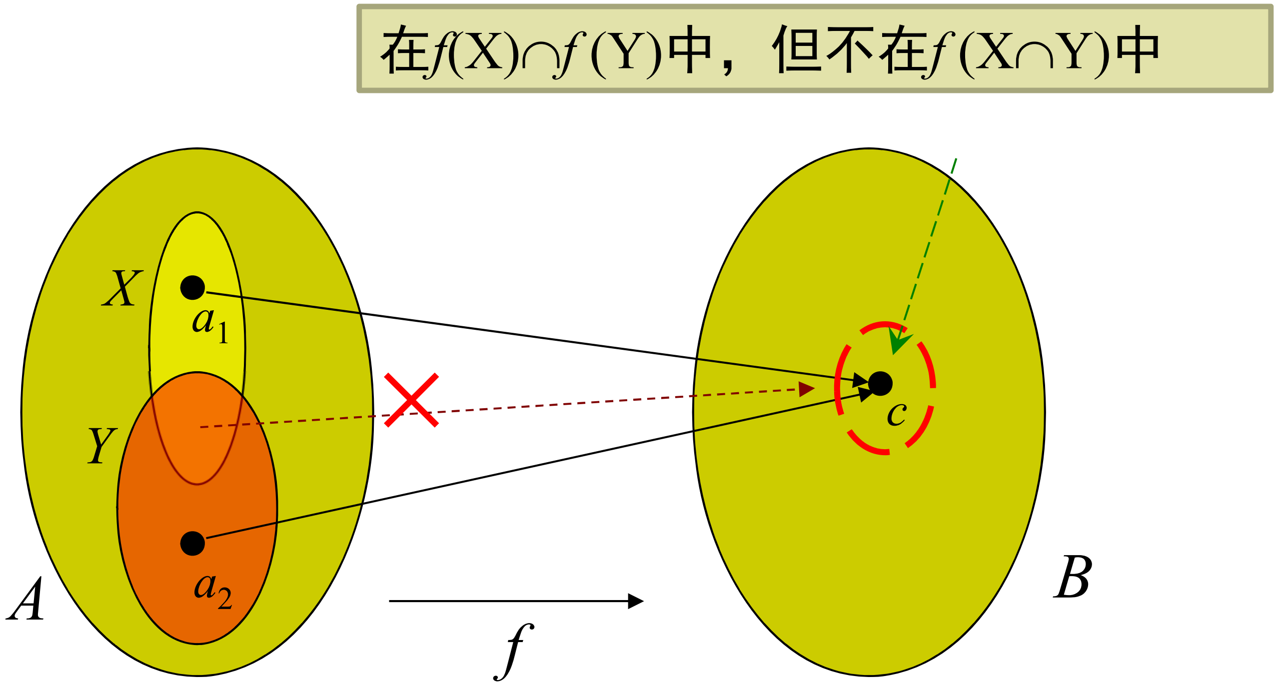
    情况1：$t\in f(X)$, 则存在$s\in X\subseteq X\cup Y$, 满足$f(s)=t$, $\therefore t\in f(X\cup Y)$

    情况2：$t\in f(Y)$, 同样可得$t\in f(X\cup Y)$

    $\therefore t\in f(X\cup Y)$

# 交集的像

- 设函数 $f$: A→B，且X，Y是A的子集，则
  - $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$



# 函数的性质

- $f$:A→B是**单射**（一对一的）
  - injection, injective function, one-to-one function
  - $\forall x_1, x_2 \in$ A, 若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) \neq f(x_2)$
  - 等价的说法：$\forall x_1, x_2 \in$ A, 若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
  - 另一种等价的说法？
- $f$:A→B是**满射**（映上的）
  - surjection, surjective function, onto function
  - $\forall y \in$ B, $\exists x \in$ A, 使得$f(x)=y$
  - 等价的说法：$f$(A)=B
- $f$:A→B是**双射**（一一对应）
  - bijection, bijective function, one-to-one correspondence
  - 满射+单射

# 函数性质的证明

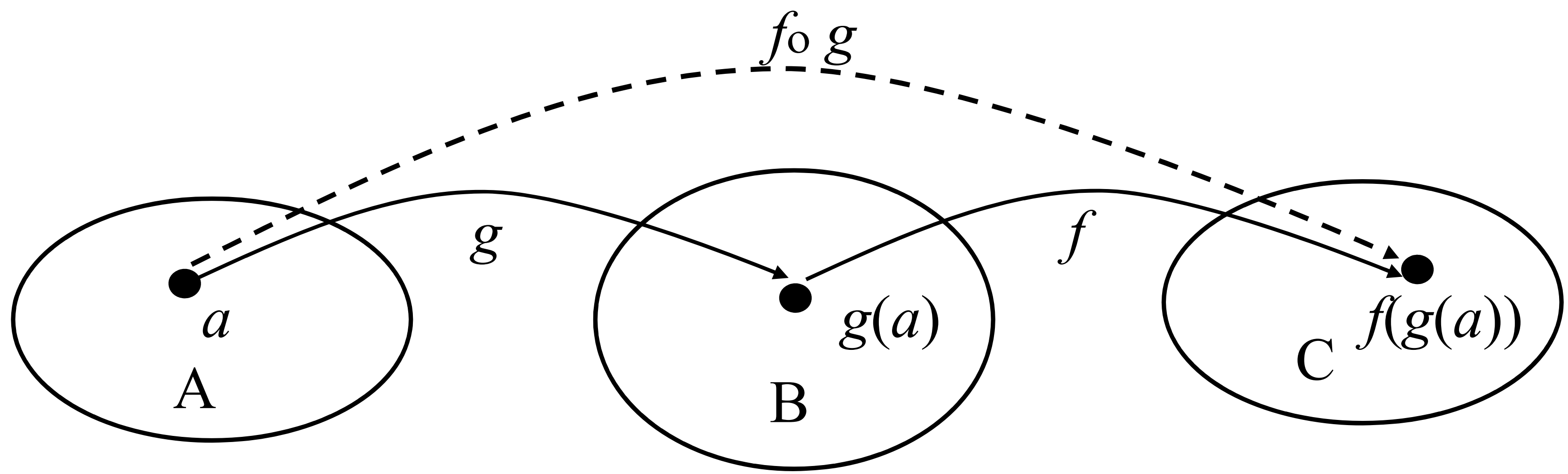
- 判断$f:R\times R\rightarrow R\times R$, $f(<x,y>) = <x+y, x-y>$的性质
- 单射？
  - 令$f(<x_1, y_1>) = f(<x_2, y_2>)$
    - $x_1+y_1=x_2+y_2$且$x_1-y_1=x_2-y_2$,易见： $x_1=x_2$且$y_1=y_2$
    - $<x_1, y_1>=<x_2, y_2>$
- 满射？
  - 任取$<a, b> \in R\times R$，总存在$<(a+b)/2,(a-b)/2>$,使得
  - $f(<(a+b)/2,(a-b)/2>)=<a, b>$

# 函数性质的证明

- 设A有限集合，$f$ 是从A到A的函数。$f$ 是单射当且仅当 $f$ 是满射。

# 函数的复合

- 设$g$是从A到B的函数，$f$是从B到C的函数，$f$和$g$的复合用$f\circ g$表示，定义为：
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))$， $x\in A$



# 复合运算的性质

- 函数的复合满足结合律
  - $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- 满射的复合是满射
- 单射的复合是单射
- 双射的复合是双射
- 设$f$是从A到B的双射
  - $f^{-1} \circ f = \iota_A$
  - $f \circ f^{-1} = \iota_B$

# 复合运算的性质

- 定理3-1：

  设$f \circ g$是复合函数：
  - 如$f$，$g$都是单射，则$f \circ g$也是单射
  - 如$f$，$g$都是满射，则$f \circ g$也是满射
  - 如$f$，$g$都是双射，则$f \circ g$也是双射

# 复合运算的性质

- 定理3-1证明

  令$f$:A→B, $g$:B→C,是两个函数

  (1)任取a1,a2∈A,假定a1≠a2,

  ∵$f$是单射，∴$f$(a1) ≠f(a2)

又∵$g$是单射的，∴$g(f(a1)) \neq g(f(a2))$

  即：$f \circ g(a1) \neq f \circ g(a2)$

  ∴$f \circ g$ 是从A到C的单射

# 复合运算的性质

(2)任取$c \in C$,

$\because g$是满射，$\therefore \exists$ 元素$b \in B$,使得$g(b)=c$

又$\because f$是满射，$\therefore \exists$ 元素$a \in A$,使得$f(a)=b$.

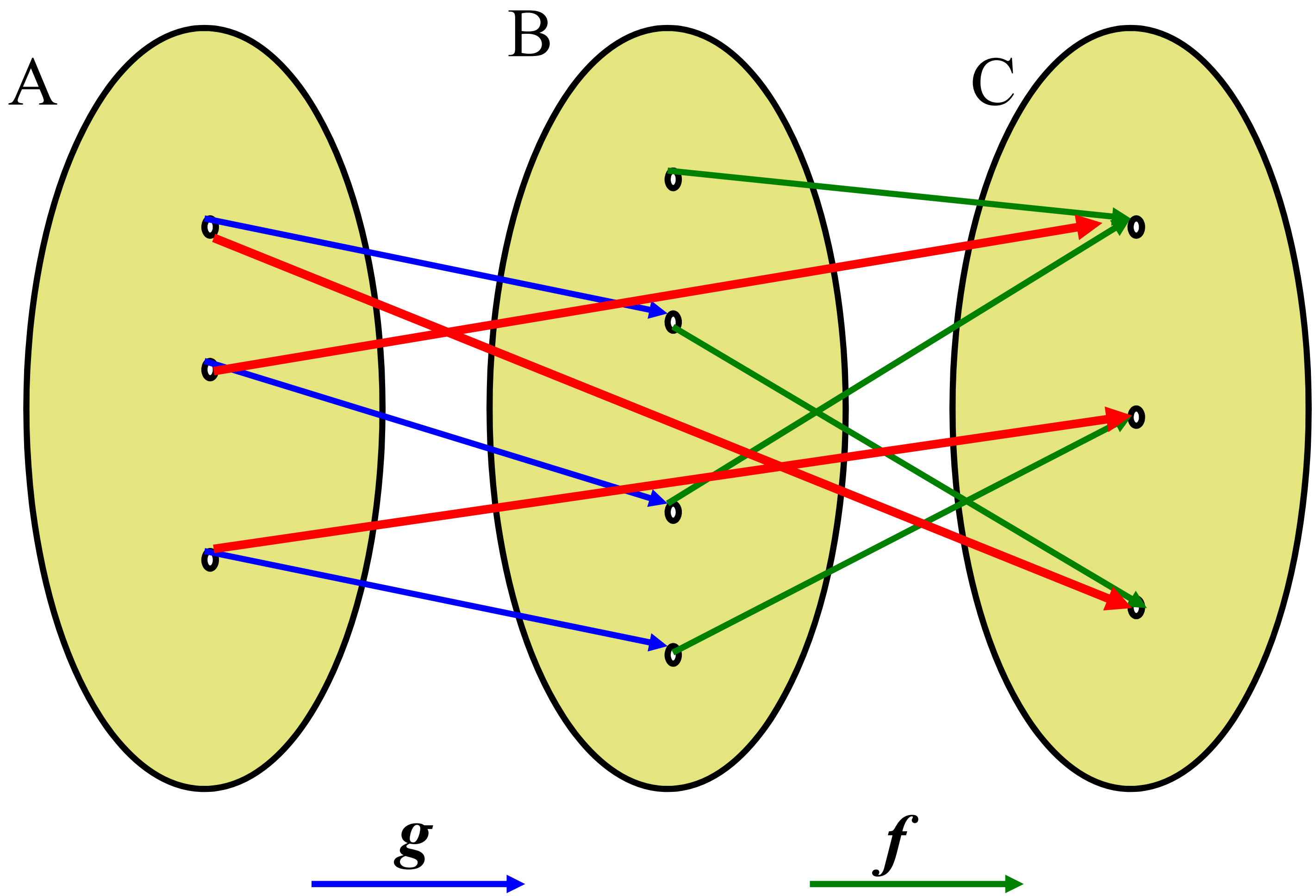
推得$f \circ g(a)=g(f(a))=g(b)=c$

$\because c$是C中的任意元素，故$f \circ g$是从A到C的满射。

(3)由(1)(2)可得(3)

# 但是...

- 若$f\circ g$是满射，能推出$f$和$g$是满射吗？
  - $f$*一定*是满射， $g$*不一定*是满射。
- 若$f\circ g$是单射，能推出$f$和$g$是单射吗？
  - $g$*一定*是单射，$f$ *不一定*是单射。


A
B
C
g
f

# 函数的加法、乘法

- 设$f$和$g$是从A到R的函数，那么 $f+g$ 和 $f\,g$也是从A到R的函数，其定义为
  - $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$， $x \in A$
  - $f\,g(x) = f(x)\,g(x)$， $x \in A$

# 递增（递减）函数

- 设$f$的定义域和伴域都是实数(或其子集),
- $f$是递增的
  - $\forall x\ \forall y\ (x<y \rightarrow f(x)\leq f(y))$
- $f$是严格递增的
  - $\forall x\ \forall y\ (x<y \rightarrow f(x)< f(y))$

# 反函数（逆函数）

- 设$f$是从A到B的一一对应，$f$的反函数是从B到A的函数，它指派给B中元素$b$的是A中满足$f(a)=b$的（唯一的）$a$。$f$的反函数记作$f^{-1}$。
  - $f(a)=b$ 当且仅当 $f^{-1}(b)=a$
  - *任何函数都有反函数吗？*

- 定理3-2

一个函数$f$:A→B有反函数当且仅当$f$是双射

# 恒等函数

- 设函数$f$：A→A, 若$\forall$ a$\in$A,有$f$(a)=a, 则称$f$为恒等函数$E_A$.

- 定理3-3

  对于任意函数$f$:A→B,

有$E_A \circ f = f \circ E_B = f$

# 反函数

- 定理3-4

  如果函数$f$：A→B， 有反函数$f^{-1}$：B→A, 则

  - $f \circ f^{-1} = E_A$
  - $f^{-1} \circ f = E_A^{-1}$
  - $(f^{-1})^{-1} = F$

# 无限集

南京大学计算机科学与技术系

# 提要

- 集合的基数
- 可数集和不可数集
- 康托尔定理

# 我们怎么比较集合的大小

- “数得清”的我们就数元素个数

- “数不清”的咋办？
  - “常识”不一定经得起追问

# 有限与无限："宇宙旅馆"


啊？客满啦？

没关系，我让现在住在 $k$ 号房间的客人移到 $k+1$ 号。你就住进第1号房间吧！

# 有限与无限：怎样的差别

- 传统观点：“整体大于部分”
- $\{1, 2, 3, \quad\}$与$\{1^2, 2^2, 3^2, \quad\}$一一对应

# 集合的等势关系

- 等势关系的定义
  - 如果存在从集合A到B的双射，则称集合A与B等势。
  - 集合A与B等势记为：A≈B, 否则A≉B。
  - A≈B意味着：A，B中的元素可以“一一对应”。
  - 要证明A≈B，找出一个从A到B的双射。
- “等势”的集合就被认为是“一样大”

# 等势关系是等价关系

- 自反性
  - $I_A$:A→A
- 对称性
  - 如果$f$:A→B是双射，则$f$的反函数$f^{-1}$: B→A，也是双射。
- 传递性
  - 若$f$:A→B，$g$ :B→C均是双射，则 $g \circ f$ 是从A到C的双射。
- 例子
  - 与自然数集等势的所有集合构成一个等价类。

# 自然数定义为集合（回顾）

- 设$a$为集合, 称$a \cup \{a\}$为$a$的后继, 记为或$s(a)$, 或$a^+$。
- 集合N递归定义如下：
  - $\varnothing \in N$
  - $\forall a(a \in N \to s(a) \in N)$
- N的每一个元素称为一个自然数（自然数集合）
  - $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, …
  - $\varnothing$记为0，$0^+$记为1，$1^+$记为2，$2^+$记为3，余此类推

# 有限集与无限集

- S是有限集合 *iff* 存在自然数$n$，使得S与$n$等势
- S不是有限集合(无限集、无穷集)， *iff* 存在S的真子集S'，使得S与S'等势

$\Rightarrow$ S一定包含一个与自然数集合等势的子集$M = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$

令$S' = S - \{a_0\}$，可以定义$f: S \to S'$如下：

对于任意$a_i \in M$, $f(a_i) = a_{i+1}$；对于任意$x \in S - M$, $f(x) = x$.

显然这是双射，即$S$与其真子集$S'$等势。

$\Leftarrow$ 假设$S$是有限集，令$|S| = n$, 则对$S$的任意真子集$S'$, 若$|S'| = m$，必有$m < n$, 因此从$S'$到$S$的任一单射不可能是满射。

# 集合A的基数

- 若A与自然数n等势，则card A = n
- 若A与自然数集合N等势，则card A = $\aleph_0$
- 若A与实数集合R等势，则card A = $\aleph$
- 如果存在从A到N的单射，则称A为可数集，或可列集。[ card A $\leq$ $\aleph_0$ ]

# 无限可数集（无穷可列集）

- 与自然数集等势的集合称为无限可数集
  - 直观上说：集合的元素可以按确定的顺序线性排列，所谓“确定的”顺序是指对序列中任一元素，可以说出：它“前”、“后”元素是什么。
- 整数集(包括负数)与自然数集等势

**0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, ……**

**0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ……**

$$g(n)=\begin{cases}2n & n>=0\\ -2n-1 & n<0\end{cases}$$

# 自然数集的笛卡儿积是可列集

- 所有的自然数对构成的集合与自然数集等势

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| <0,0> | <1,0> | <2,0> | <3,0> | <4,0> | ••• |
| <0,1> | <1,1> | <2,1> | <3,1> | ••• | |
| <0,2> | <1,2> | <2,2> | ••• | | |
| <0,3> | <1,3> | ••• | | | |
| <0,4> | | | | | |

类似的图形显示：
可列个可列集的并集仍然是可列集合

<0,0>, <0,1>, <1,0>, <0,2>, <1,1>, <2,0>, <0,3>, ......

$$l(m,n)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+n} i+(m+1)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+(m+1)$$

# 证明无限集等势的例子

- (0,1)与整个实数集等势
  - 双射：$f:(0,1)\to R: f(x)=\mathrm{tg}(\pi x-\frac{\pi}{2})$
- 对任意不相等的实数a,b($a<b$), [0,1]与[a,b]等势
  - 双射：$f:[0,1]\to[a,b]: f(x)=(b-a)x+a$

    (这实际上意味着：任意长的线段与任意短的线段等势)

# 实数集不是可列集

- (0,1)不是可列集 //注意：(0,1)与实数集合等势
  - “对角线证明法”

    假设(0,1)中的元素可以线性排列：

    $0.b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}\dots$

    $0.b_{21}b_{22}b_{23}b_{24}\dots$

    $0.b_{31}b_{32}b_{33}b_{34}\dots$

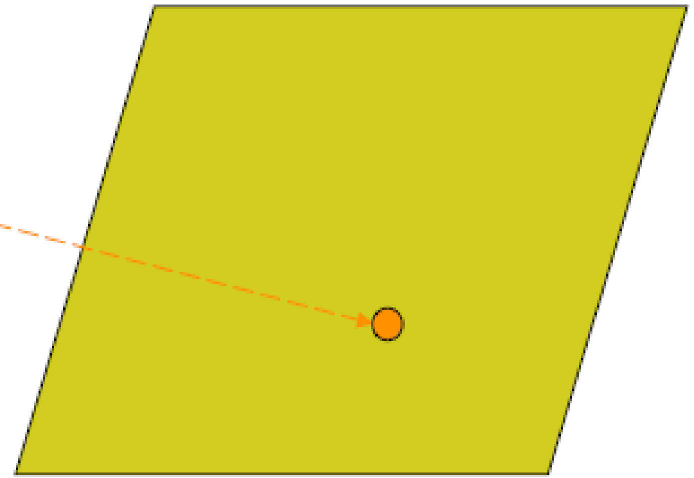
    $0.b_{41}b_{42}b_{43}b_{44}\dots$

    $\vdots$

    则$0.\ b_1b_2b_3b_4\dots$（$b_i \neq b_{ii}$）不含在上述序列中

# 直线上的点集与平面上的点集等势

$$\begin{cases} 0.a_1a_2a_3\ldots\ldots \\ 0.b_1b_2b_3\ldots\ldots \end{cases}$$



$0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots\ldots$

这实际上意味着直线上的点与任意有限维空间的点“一样多”！

# Cantor（康托尔）定理

- 任何集合与其幂集不等势，即：$A \not\approx \rho(A)$
  - 证明要点：

设$g$是从A到$\rho(A)$的函数，构造集合B如下：

$$B=\{x \in A \mid x \notin g(x)\}$$

则$B \in \rho(A)$，但不可能存在$x \in A$，能满足$g(x)=B$，因为，如果有这样的$x_0$, 则$x_0 \in B \leftrightarrow x_0 \notin B$。

因此，$g$不可能是满射。