集合论

南京大学计算机科学与技术系

提要

- 基本概念
  - 集合及其描述
- 集合间的相互关系
  - 集合相等、子集关系
- 集合运算
  - 交并补
  - 文氏图

集合的定义

- 直观的定义
  - 一个集合是一组无序的对象，这些对象称为这个集合的元素或成员。
  - $a\in$A表示a是集合A的一个成员， $a\notin$A 表示a不是A的成员。
- Georg Cantor的描述
  - [English translation] A set is a collection into a whole of definite, distinct objects of our intuition or our thought. The objects are called elements (member) of the set.

Naïve set theory，朴素集合论

集合的描述

- 穷举列表法：
  - $V=\{a, e, i, o, u\}$
  - $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
- 特性刻划法：
  - $\{x \mid P(x)\}$, P： 某种思维、观察中总结出的对象性质
    - $a\in\{x \mid P(x)\} \leftrightarrow P(a)$
  - 例：$Z^{+}=\{x\in Z \mid x>0\}$， $Q=\{p/q \mid p\in Z, q\in Z, q\neq 0\}$，
    - $[a, b]=\{x\in R \mid a\leq x\leq b\}$

集合的描述

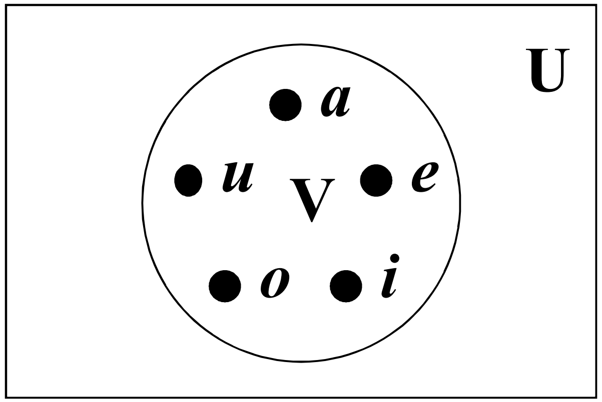
- 计算规则定义法：
  - 设$a_1=1,a_2=2$,
    当 $i>2$时，$a_{i+1}=a_i+a_{i-1}$

  则有：

  $S=\{a_k|k\in I^+\}=\{1,2,3,5,8,13,\ldots\ldots\}$

集合的描述

- **文氏图**（Venn diagrams ）//John Venn
  - 文氏图是研究集合运算时的形象、直观工具。
  - 矩形内部表示全集，与它相关的集合均用圆形表示在矩形内。



特殊符号

- 本书中规定的几个表示特定集合的符号。
  - R:实数集合
  - Q:有理数集合
  - I : 整数集合
  - I^+: 正整数集合
  - N: 自然数集合 {0，1，2，……}
  - $N_m(m\geq1)$:集合{0，1，……m-1}

集合的大小

- 有限集合及其基数
  - 若S恰有n个不同的元素，n是自然数，就说S是有限集合，而n是S的基数，记作$|S|=n$。
- 无限集合
  - 如果一个集合不是有限的，就说它是无限的。

集合相等、子集关系

- 定义：集合相等当且仅当它们有同样的元素
  - A=B 当且仅当 $\forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B)$ //外延原则
- 定义：集合A称为集合B的子集， 记作$A\subseteq B$
  - $\forall x\ (x\in A \rightarrow x\in B\ )$
  - 如果$A\subseteq B$, 但$A\neq B$，则A是B的真子集，记作$A\subset B$
- 定理：对任意集合A和B, A=B 当且仅当:
  - $A\subseteq B$, 且$B\subseteq A$

子集关系的一个性质

- 证明：如果X$\subseteq$Y且Y$\subseteq$Z, 则X$\subseteq$Z
- 要证明： “对任意的 a, 如果 $a\in$X, 则 $a\in$Z”
- 证明：
  - 对任意的 $a\in$X
  - 根据已知的 “X$\subseteq$Y”， 可得：$a\in$Y
  - 根据已知的 “Y$\subseteq$Z”， 可得：$a\in$Z
  - 所以， $\forall a\ (a\in X \rightarrow a\in Z)$, 即X$\subseteq$Z

空集

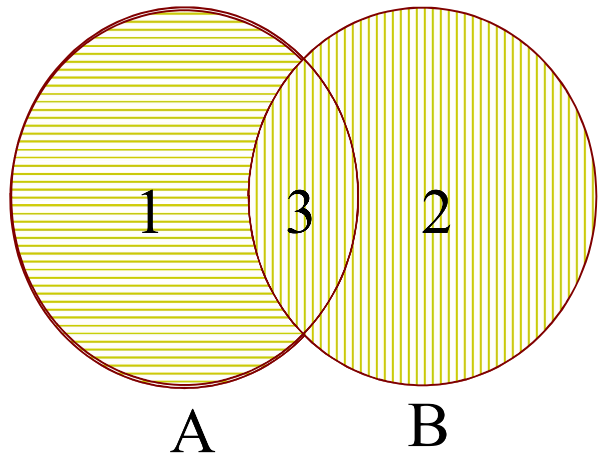
- 存在一个没有任何元素的集合：空集∅
- 关于空集的一些性质：
  - 空集是任何集合的子集。
    - $\varnothing \subseteq A$，即 $\forall x(x \in \varnothing \rightarrow x \in A)$
  - 空集是唯一的，可以用 ∅表示
    - 如果 $\varnothing_1, \varnothing_2$都是空集，则 $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ 和 $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$ 均为真

全集

- 如果所涉及的集合都是某个集合U的子集，则称U为全集。
  - 例：U可以是全体整数集合，自然数集合等等。

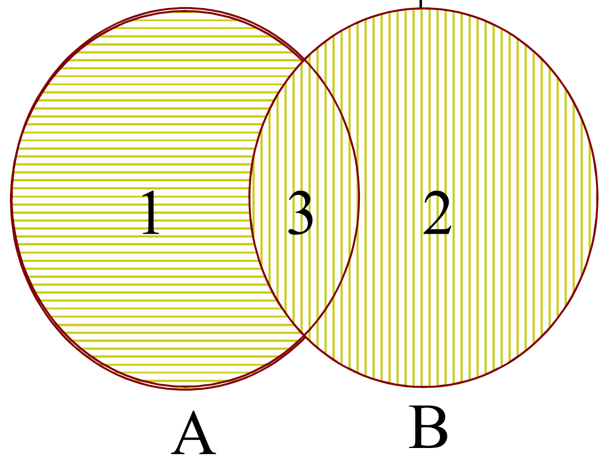
集合运算的定义

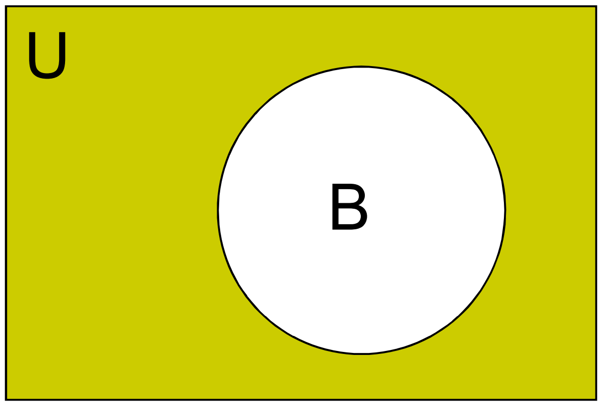
- 运算定义的基本方式：将结果定义为一个新的集合
  - 并：$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$
    - 并集: {1, 2 , 3}
  - 交：$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$
    - 交集: {3}



相对补（差）

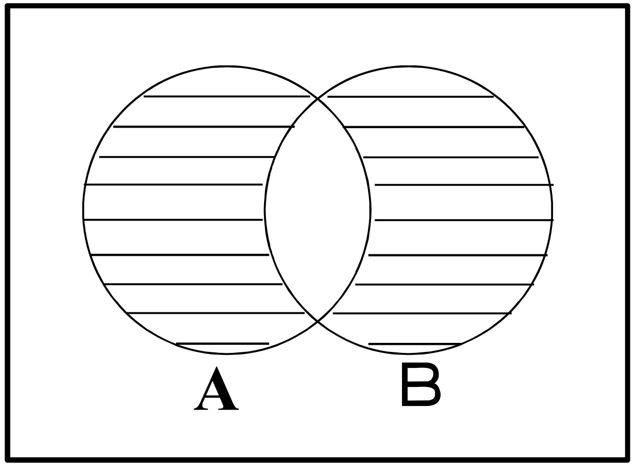
- B对于A的补集
  - $A-B=\{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$
- 举例，A-B={1}
- 全集U与B的差：U-B称为B的“补集”，记为~B
  - $x \in \sim B \leftrightarrow x \notin B$





对称差

- 对称差
  - $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$
- 证明: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$
  - $(A-B) \cup (B-A) \subseteq (A \cup B) - (A \cap B)$
  - $(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq (A-B) \cup (B-A)$



幂集

- S是一个集合，S的幂集是S的所有子集的集合
  - $\rho(S)=\{x \mid x \subseteq S\}$
- 举例
  - $\rho(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
  - $\rho(\varnothing) = \{\varnothing\}$

If $\rho(A) \subseteq \rho(B)$, then $A \subseteq B$

$\mathcal{P}(X)$
$\mathcal{P}(X)$
$\mathscr{P}(X)$
$\wp(X)$
$\mathbb{P}(X)$
$\mathrm{P}(X)$

集合代数推演

- 利用已知恒等式或等式作集合代数推演
  - 例：已知$A \oplus B = A \oplus C$, 证明$B = C$

$$
\begin{aligned}
B &= \varnothing \oplus B \\
&= (A \oplus A) \oplus B \\
&= A \oplus (A \oplus B) \\
&= A \oplus (A \oplus C) \\
&= C
\end{aligned}
$$

集合恒等式（1）

等 式	名 称
$A\cup\varnothing=A$ $A\cap U=A$	恒等律
$A\cup U=U$ $A\cap\varnothing=\varnothing$	支配律
$A\cup A=A$ $A\cap A=A$	幂等律
$\sim(\sim A)=A$	补集律
$A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$	交换律

集合恒等式（2）

等 式	名 称
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	结合律
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	分配律
$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$ $\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$	德摩根定律
$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	吸收律
$A\cup\sim A=U$ $A\cap\sim A=\varnothing$	补律

p.5 例1-17

- 试证：

$$如果A \subseteq B, C \subseteq D, 则(\mathrm{A} \cap C) \subseteq (B \cap D)$$

- 证明:

$$任取x \in A \cap C, 于是有x \in A并且\mathrm{x} \in C$$

$$由于条件A \subseteq B, C \subseteq D, 故有x \in B并且\mathrm{x} \in D$$

$$从而有x \in B \cap D, 所以(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$$

p.6 例1-18

- 例：证明下式:

$$A-(B\bigcup C)=(A-B)\bigcap(A-C)$$

证明：对任意的x, $\mathrm{x}\in A-(B\bigcup C)$

$\Leftrightarrow x\in A$并且$x\notin B\bigcup C \Leftrightarrow x\in A$并且$\neg(x\in B\bigcup C)$

$\Leftrightarrow x\in A$并且$\neg$（$x\in B$或$x\in C$）

$\Leftrightarrow x\in A$并且（$\neg x\in B$并且$\neg x\in C$）

$\Leftrightarrow (x\in A$并且$\mathrm{x}\notin B)$并且（$\mathrm{x}\in A$并且$\mathrm{x}\notin C)$

$\Leftrightarrow x\in A-B$并且$\mathrm{x}\in A-C$

$\Leftrightarrow x\in (A-B)\bigcap(A-C)$所以原式成立

集合基数的运算

- 定理1-4

  如果A和B是分离的有限集合，则有
  $|A \cup B| = |A| + |B|$

- 定理1-5

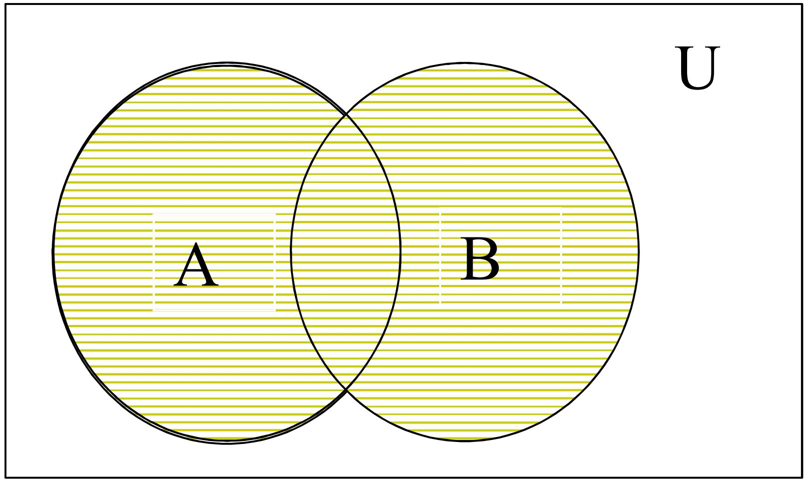
  若A和B是有限集合，则有
  $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

- 定理1-6
  - 若A、B、C是有限集合，则有

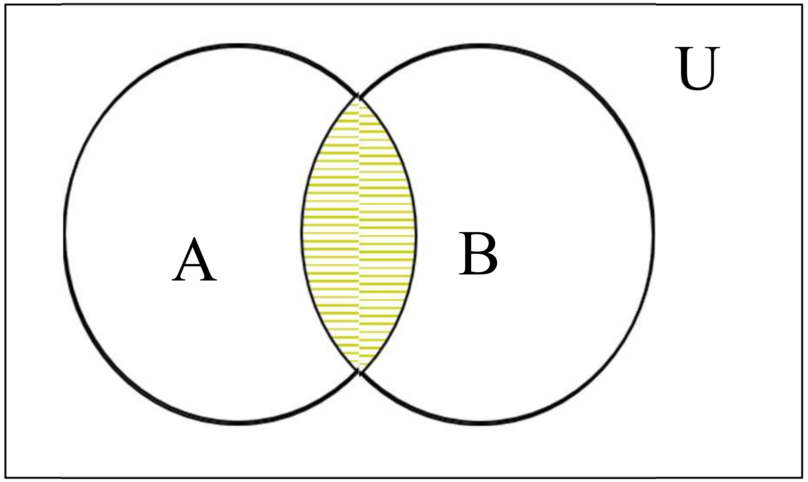
    $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

文氏图的使用

- 基本集合运算的文氏图



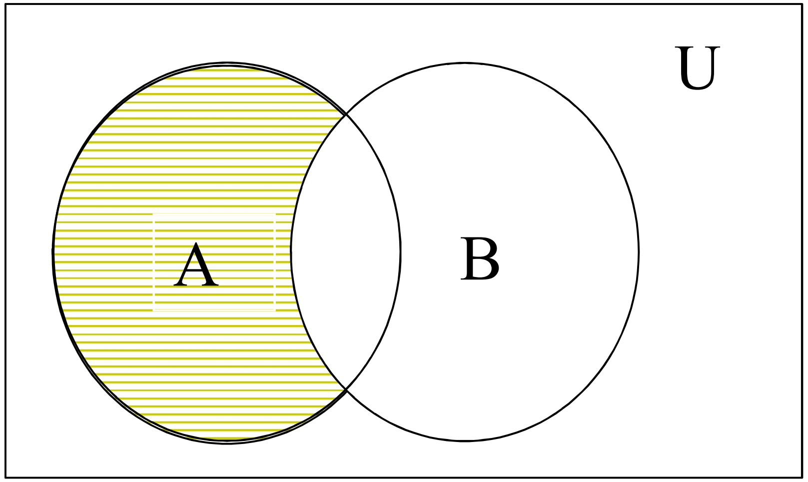
$A \cup B$



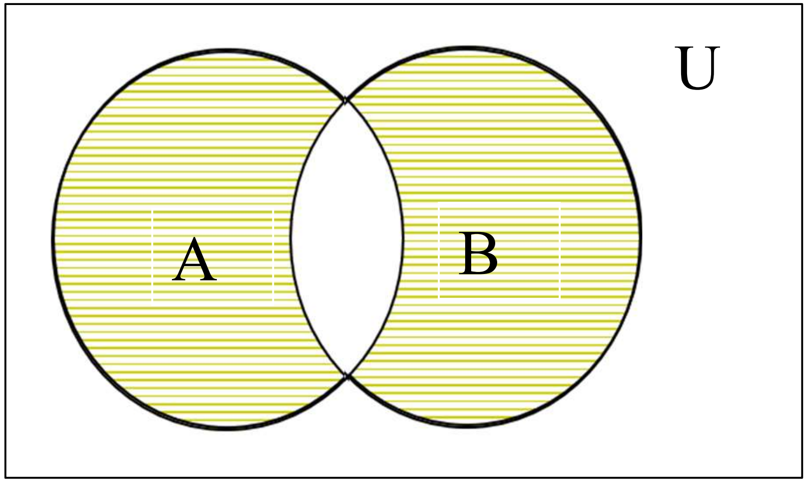
$A \cup B$

文氏图的使用

- 基本集合运算的文氏图



$A-B$



$A \oplus B$

习题一

- 1, 3, 5, 7, 9, 14, 15, 18-(1), 27-(1) (2)
- 29-(2), 30