无限集

南京大学计算机科学与技术系

提要

- 集合的基数
- 可数集和不可数集
- 康托尔定理

我们怎么比较集合的大小

- “数得清”的我们就数元素个数
- “数不清”的咋办？
  - “常识”不一定经得起追问

有限与无限：“宇宙旅馆”

啊？客满啦？

没关系，我让现在住在 k 号房间的客人移到 $k+1$ 号。你就住进第1号房间吧！

有限与无限：怎样的差别

- 传统观点："整体大于部分"
- $\{1, 2, 3, \quad\}$与$\{1^2, 2^2, 3^2, \quad\}$一一对应

集合的等势关系

- 等势关系的定义
  - 如果存在从集合A到B的双射，则称集合A与B等势。
  - 集合A与B等势记为：$A \approx B$, 否则$A \not\approx B$。
  - $A \approx B$意味着：A，B中的元素可以“一一对应”。
  - 要证明$A \approx B$，找出一个从A到B的双射。
- “等势”的集合就被认为是“一样大”

等势关系是等价关系

- 自反性
  - $I_A:A\to A$
- 对称性
  - 如果$f:A\to B$是双射，则f的反函数$f^{-1}: B\to A$，也是双射。
- 传递性
  - 若$f:A\to B$，$g:B\to C$均是双射，则 $g\circ f$ 是从A到C的双射。
- 例子
  - 与自然数集等势的所有集合构成一个等价类。

自然数定义为集合（回顾）

- 设a为集合, 称$a\cup\{a\}$为a的后继, 记为或s(a), 或a^+。
- 集合N递归定义如下：
  - $\varnothing\in N$
  - $\forall a(a\in N \rightarrow s(a)\in N)$
- N的每一个元素称为一个自然数（自然数集合）
  - $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, …
  - $\varnothing$记为0，0^+记为1，1^+记为2，2^+记为3，余此类推

有限集与无限集

- S是有限集合 *iff* 存在自然数n，使得S与n等势
- S不是有限集合(无限集、无穷集)， *iff* 存在S的真子集S’，使得S与S’等势

$\Rightarrow$ S一定包含一个与自然数集合等势的子集M = $\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$

令S’=S-$\{a_0\}$，可以定义f:S$\to$S’如下：

对于任意$a_i \in$M, $f(a_i)= a_{i+1}$； 对于任意$x \in$S-M, $f(x)= x$.

显然这是双射，即S与其真子集S'等势。

$\Leftarrow$ 假设S是有限集，令$|S|=n$, 则对S的任意真子集S', 若$|S'|=m$，必有$m<n$, 因此从S'到S的任一单射不可能是满射。

集合A的基数

- 若A与自然数n等势，则card A = n
- 若A与自然数集合N等势，则card A = $\aleph_0$
- 若A与实数集合R等势，则card A = $\aleph$
- 如果存在从A到N的单射，则称A为可数集，或可列集。[card A $\leq$ $\aleph_0$]

无限可数集（无穷可列集）

- 与自然数集等势的集合称为无限可数集
  - 直观上说：集合的元素可以按确定的顺序线性排列，所谓“确定的”顺序是指对序列中任一元素，可以说出：它“前”、“后”元素是什么。
- 整数集(包括负数)与自然数集等势

0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, ...

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

$$g(n)=\begin{cases} 2n & n>=0 \\ -2n-1 & n<0 \end{cases}$$

自然数集的笛卡儿积是可列集

- 所有的自然数对构成的集合与自然数集等势

<0,0>	<1,0>	<2,0>	<3,0>	<4,0>	•••
<0,1>	<1,1>	<2,1>	<3,1>	•••	
<0,2>	<1,2>	<2,2>	•••		
<0,3>	<1,3>	•••			
<0,4>					

类似的图形显示：
可列个可列集的并集仍然是可列集合

<0,0>, <0,1>, <1,0>, <0,2>, <1,1>, <2,0>, <0,3>, ……

$$l(m,n)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+n} i+(m+1)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+(m+1)$$

证明无限集等势的例子

- (0,1)与整个实数集等势
  - 双射：$f:(0,1)\to R: f(x)=\mathrm{tg}(\pi x-\frac{\pi}{2})$
- 对任意不相等的实数a,b($a<b$), [0,1]与[a,b]等势
  - 双射：$f:[0,1]\to[a,b]: f(x)=(b-a)x+a$

  (这实际上意味着：任意长的线段与任意短的线段等势)

实数集不是可列集

- (0,1)不是可列集 //注意：(0,1)与实数集合等势
  - “对角线证明法”

    假设(0,1)中的元素可以线性排列：

    $0.b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}\ldots$

    $0.b_{21}b_{22}b_{23}b_{24}\ldots$

    $0.b_{31}b_{32}b_{33}b_{34}\ldots$

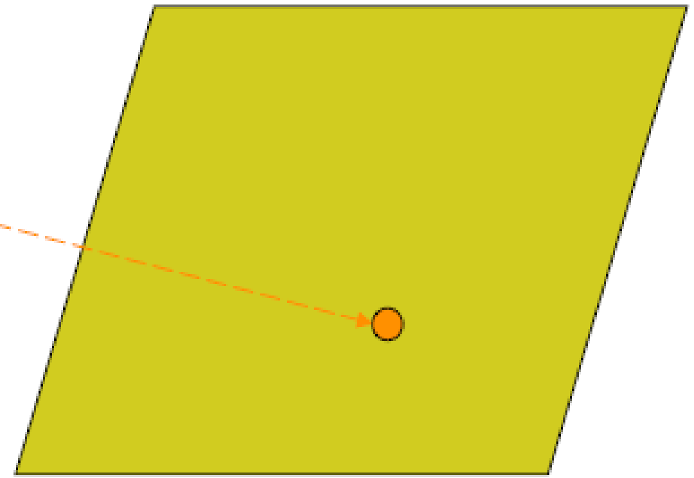
    $0.b_{41}b_{42}b_{43}b_{44}\ldots$

    $\vdots$

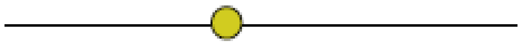
    则$0.\ b_1b_2b_3b_4\ldots$（$b_i \neq b_{ii}$）不含在上述序列中

直线上的点集与平面上的点集等势

$$\begin{cases} 0.a_1a_2a_3\ldots\ldots \\ 0.b_1b_2b_3\ldots\ldots \end{cases}$$



$$0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots\ldots$$



这实际上意味着直线上的点与任意有限维空间的点“一样多”！

Cantor（康托尔）定理

- 任何集合与其幂集不等势，即：$A \not\approx \rho(A)$
  - 证明要点：

设g是从A到$\rho(A)$的函数，构造集合B如下：

$$B=\{x \in A \mid x \notin g(x)\}$$

则$B \in \rho(A)$，但不可能存在$x \in A$，能满足$g(x)=B$，因为，如果有这样的x_0，则$x_0 \in B \leftrightarrow x_0 \notin B$。

因此，g不可能是满射。

- 习题四
- 1，2，3.