函数

南京大学计算机科学与技术系

提要

- 函数的基本概念
- 函数的性质（特殊函数）
- 函数的复合
- 反函数（逆函数）

函数(function)的定义

- 设 A 和 B 为非空集合，从集合A到B的函数 f 是对元素的一种指派，对A的每个元素恰好指派B的一个元素。记作 $f:A \to B$。
  - Well defined(良定义)
  - $f:A \to B$：函数的型构
  - f 的定义域（domain）是A，f 的伴域（codomain）是B
  - 如果 f 为A中元素a指派的B中元素为b，就写成 $f(a)=b$。此时，称 b是a的像，而a是b的一个原像。
  - A中元素的像构成的集合称为f的值域 range （f的像 image）。
- 函数也称为映射(mapping)或变换(transformation)

函数是一种特殊的关系

- A 和 B 为非空集合, 若关系 $R \subseteq A \times B$ 满足
  - 对于A 中的每个元素 a，B 中都有且仅有一个元素 b 使得 aRb

则 R 是一个从 A 到 B 的函数。

如何用逻辑公式表达上述条件？

函数举例

- $F1=\{(a1,b1), (a2,b1), (a3,b2)\}$是函数

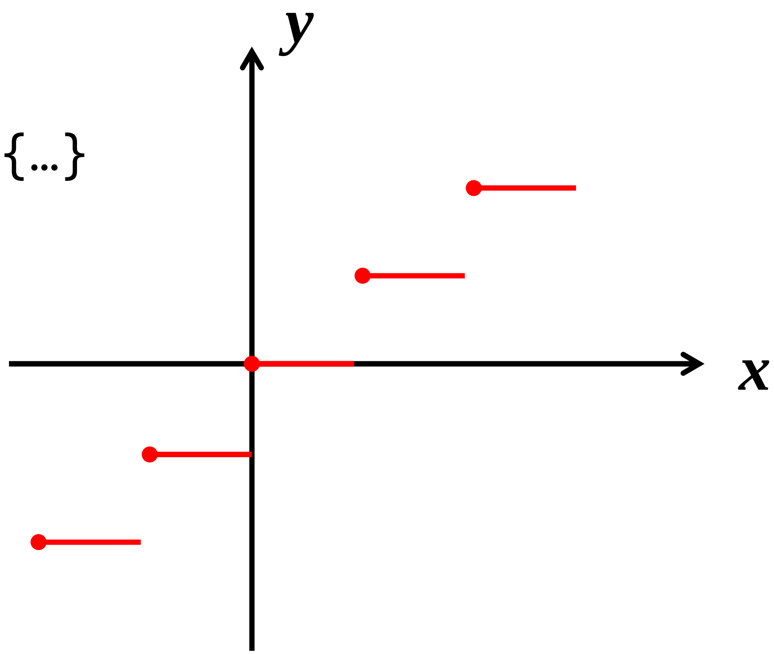
- $F2=\{(a1,b1),(a1,b2),(a2,b1),(a3,b2)\}$不是函数

函数举例

- 下取整函数 $\lfloor x \rfloor$: R $\to$ Z

```
Java Program
int  floor(float real) {…}
```

```
floor: float → int
```



- 函数 f 的图像: $\{(a, b) \mid a \in \mathrm{A} \wedge f(a)=b\}$

函数举例

- **某课程成绩**

Program

```
CourseGrade  grade(StudentName sname, CourseName cname) {…}
```

函数原型

函数型构

Function:

Grade: StudentName ×CourseName→ CourseGrade

姓名	课程	成绩
张明	离散数学	
李宁	程序设计	
王琴	数据结构	

函数举例

- 设A为非空集合，A上的 恒等函数$\iota_A:A\to A$定义为
  - $\iota_A(x)=x$， $x\in A$
- 设 U 为非空集合， 对任意的$A\subseteq U$， 特征函数 $\chi_A:U\to\{0,1\}$ 定义为：
  - $\chi_A(x)=1$， $x\in A$
  - $\chi_A(x)=0$， $x\in U\text{-}A$

如果要记录每节离散数学课的到课情况？

函数(function)的相等

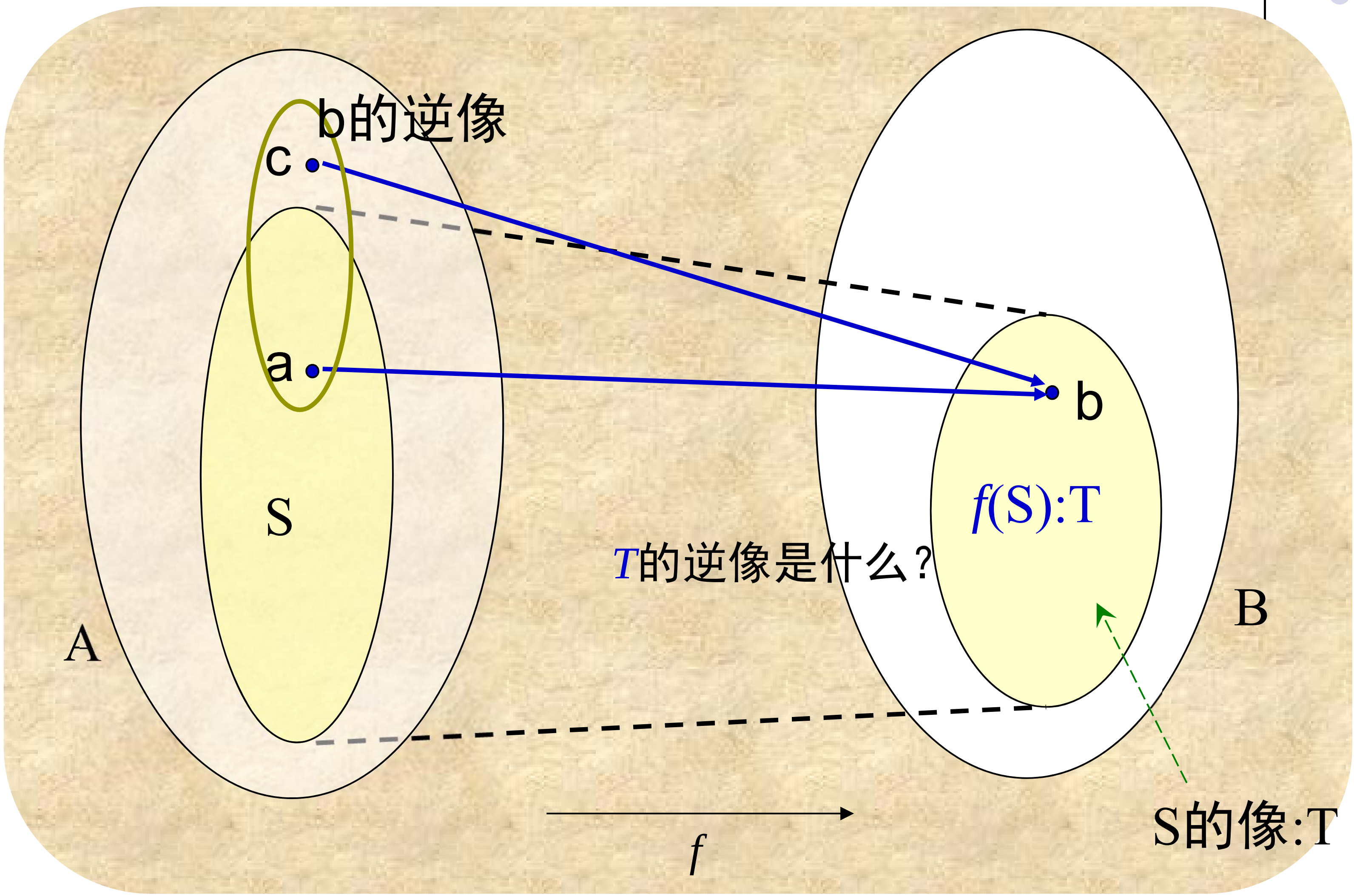
- 函数相等 $f=g$ if
  - $\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(g)$
  - <u>$\mathrm{codom}(f)=\mathrm{codom}(g)$</u>
  - $\forall x(x\in \mathrm{dom}(f) \rightarrow f(x)=g(x))$

子集在函数下的像

- 设 f 是从集合A到B的函数，S 是A的一个子集。S 在 f 下的像，记为$f(S)$，定义如下：
  - $f(S) = \{t | \exists_{s \in S} t = f(s)\}$

- 备注：$f(A)$ 即为 f 的值域。

S的像和逆像



并集的像

- 设函数 f: A→B，且X，Y是A的子集，则

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$$

- 证明:
  - $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$

    对任意的t，若$t \in f(X \cup Y)$, 则存在$s \in X \cup Y$, 满足$f(s)=t$; 假设 $s \in X$, 则$t \in f(X)$, 假设$s \in Y$, 则$t \in f(Y)$, $\therefore t \in f(X) \cup f(Y)$
  - $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$

    对任意的t，若$t \in f(X) \cup f(Y)$

    情况1：$t \in f(X)$, 则存在$s \in X \subseteq X \cup Y$, 满足$f(s)=t$, $\therefore t \in f(X \cup Y)$

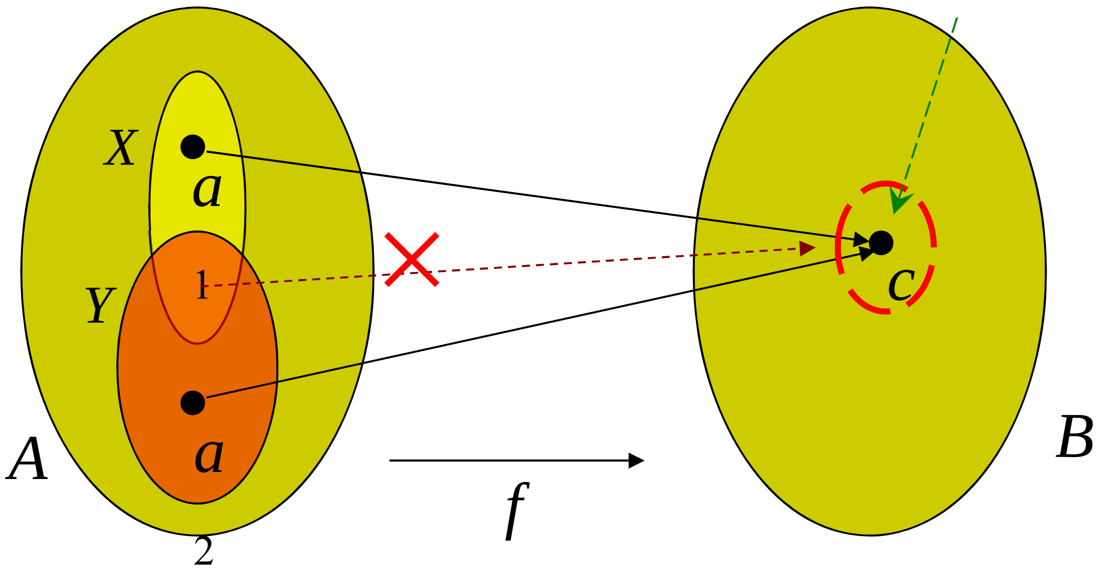
    情况2： $t \in f(Y)$, 同样可得$t \in f(X \cup Y)$

    $\therefore t \in f(X \cup Y)$

交集的像

- 设函数 $f: A \to B$，且X，Y是A的子集，则
  - $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

在$f(X) \cap f(Y)$中，但不在$f(X \cap Y)$中



函数的性质

- f:A→B是**单射**（一对一的）
  - injection, injective function, one-to-one function
  - $\forall x_1, x_2 \in A$, 若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) \neq f(x_2)$
  - 等价的说法：$\forall x_1, x_2 \in A$, 若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
  - 另一种等价的说法？
- f:A→B是**满射**（映上的）
  - surjection, surjective function, onto function
  - $\forall y \in B$, $\exists x \in A$, 使得$f(x)=y$
  - 等价的说法：$f(A)=B$
- f:A→B是**双射**（一一对应）
  - bijection, bijective function, one-to-one correspondence
  - 满射+单射

函数性质的证明

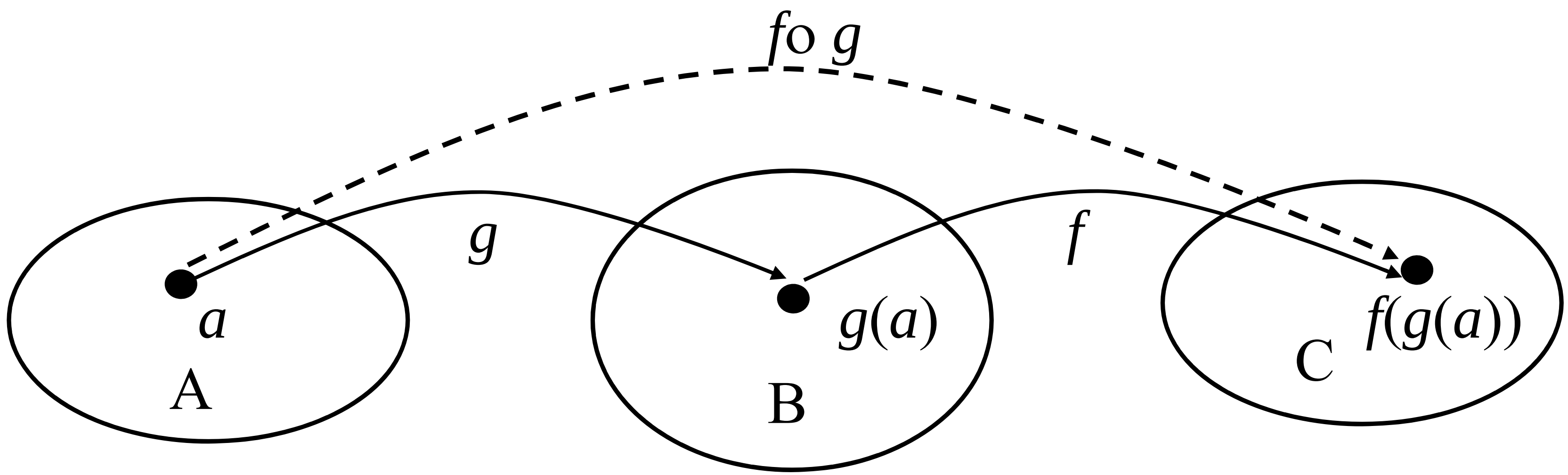
- 判断f:$R\times R \to R\times R$, $f(<x,y>) = <x+y, x-y>$的性质
- 单射?
  - 令$f(<x_1, y_1>) = f(<x_2, y_2>)$
    - $x_1+y_1=x_2+y_2$且$x_1-y_1=x_2-y_2$,易见： $x_1=x_2$且$y_1=y_2$
    - $<x_1, y_1>=<x_2, y_2>$
- 满射?
  - 任取$<a, b> \in$ R×R，总存在$<(a+b)/2,(a-b)/2>$,使得
  - $f(<(a+b)/2,(a-b)/2>)=<a, b>$

函数性质的证明

- 设A有限集合，f 是从A到A的函数。f 是单射当且仅当 f 是满射。

函数的复合

- 设g是从A到B的函数，f是从B到C的函数，f和g的复合用$f \circ g$表示，定义为：
  - $(f \circ g)(x)= f(g(x))$， $x \in A$



复合运算的性质

- 函数的复合满足结合律
  - $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- 满射的复合是满射
- 单射的复合是单射
- 双射的复合是双射
- 设f是从A到B的双射
  - $f^{-1} \circ f = \iota_A$
  - $f \circ f^{-1} = \iota_B$

复合运算的性质

- 定理3-1：

  设$f \circ g$是复合函数：

  - 如f，g都是单射，则$f \circ g$也是单射
  - 如f，g都是满射，则$f \circ g$也是满射
  - 如f，g都是双射，则$f \circ g$也是双射

复合运算的性质

- 定理3-1证明

  令f:A→B, g:B→C,是两个函数

  (1)任取a1,a2∈A,假定a1≠a2,

  ∵f是单射，∴f(a1) ≠f(a2)

又∵g是单射的，∴$g(f(a1)) \neq g(f(a2))$

即：$f \circ g(a1) \neq f \circ g(a2)$

∴$f \circ g$ 是从A到C的单射

复合运算的性质

(2)任取$c\in C$,

$\because g$是满射，$\therefore\exists$元素$b\in B$,使得$g(b)=c$

又$\because f$是满射，$\therefore\exists$元素$a\in A$,使得$f(a)=b$.

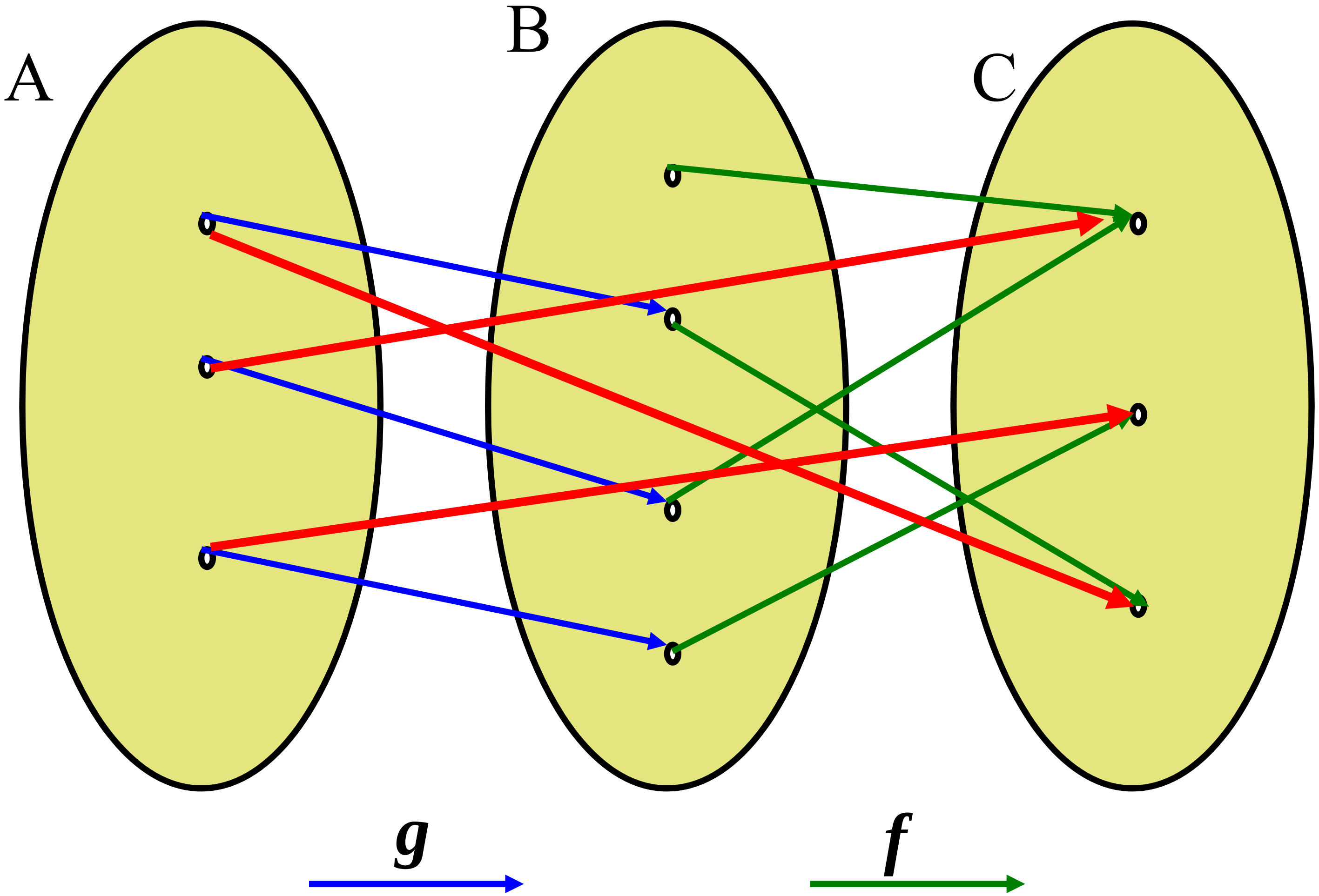
推得$f\circ g(a)=g(f(a))=g(b)=c$

$\because c$是C中的任意元素，故$f\circ g$是从A到C的满射。

(3)由(1)(2)可得(3)

但是…

- 若$f \circ g$是满射，能推出f和g是满射吗？
  - f*一定*是满射，g*不一定*是满射。
- 若$f \circ g$是单射，能推出f和g是单射吗？
  - g*一定*是单射，f *不一定*是单射。


A
B
C
g
f

函数的加法、乘法

- 设f和g是从A到R的函数，那么 $f+g$ 和 $f\ g$也是从A到R的函数，其定义为
  - $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$， $x \in A$
  - $f\ g(x) = f(x)\ g(x)$， $x \in A$

递增（递减）函数

- 设f的定义域和伴域都是实数(或其子集),
- f是递增的
  - $\forall x\, \forall y\, (x<y \to f(x) \leq f(y))$
- f是严格递增的
  - $\forall x\, \forall y\, (x<y \to f(x) < f(y))$

反函数（逆函数）

- 设f是从A到B的一一对应，f的反函数是从B到A的函数，它指派给B中元素b的是A中满足$f(a)=b$的（唯一的）a。f的反函数记作f^{-1}。
  - $f(a)=b$ 当且仅当 $f^{-1}(b)=a$
  - *任何函数都有反函数吗？*

- 定理3-2

  一个函数f:A→B有反函数当且仅当f是双射

恒等函数

- 设函数f：A→A, 若$\forall$ a$\in$A,有f(a)=a, 则称 f 为恒等函数E_A.

- 定理3-3

  对于任意函数f:A→B，

  有$E_A \circ f = f \circ E_B = f$

反函数

- 定理3-4

  如果函数f：A→B， 有反函数f^{-1}：B→A, 则

  - $f \circ f^{-1} = E_A$
  - $f^{-1} \circ f = E_A^{-1}$
  - $(f^{-1})^{-1} = F$

- 习题三
- 3-（1）、（3），4，8，
- 14-（1）、(2)、（3）。