关系

南京大学计算机科学与技术系

提要

- 二元关系
  - 关系的定义
  - 关系的表示
- 关系的性质
- 关系的运算
  - 关系的闭包
- 等价关系
- 偏序关系

有序对（Ordered pair）

- (a, b)是集合$\{\{a\}, \{a, b\}\}$的简写
- 次序的体现
  - $(x,y)=(u,v)$ iff $x=u$ 且 $y=v$

若$\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}$，则$\{x\}=\{u\}$或$\{x\}= \{u,v\}$, 因此$x=u$。

假设$y\neq v$

(1) 若$x=y$, 左边$=\{\{x\}\}$, 而$v\neq x$, $\therefore$右边$\neq\{\{x\}\}$;

(2) 若$x\neq y$,则必有$\{x,y\}= \{u,v\}$, 但y既非u,又非v, 矛盾。

笛卡尔乘积（Cartesian Product）

- 对任意集合A, B
  笛卡尔积 $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

- 例：$\{1,2,3\} \times \{a,b\} = \{(1, a), (2, a), (3, a),$
  $(1, b), (2, b), (3, b)\}$

- 若A，B是有限集合，$|A \times B| = |A| \times |B|$

p.14 例2-1

- 令$A=\{1,2\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\varnothing$ 则
  - $A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c)(2,a),(2,b),(2,c)\}$
  - $B\times A=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$
  - $A\times C=\varnothing$

（二元）关系的定义

- 若A, B是集合,从A到B的一个关系是$A\times B$的一个子集.
  - 集合, 可以是空集
  - 集合的元素是有序对
- 关系意味着什么？
  - 两类对象之间建立起来的联系！

从A到B的二元关系

- 笛卡尔乘积的子集
  - “从A到B的关系”R；$R \subseteq A \times B$
  - 若$A=B$： 称为“集合A上的（二元）关系”
- 例子
  - 常用的数学关系：不大于、整除、集合包含等
  - 网页链接、文章引用、相互认识

特殊的二元关系

- 集合A上的空关系∅: 空关系即空集
- 全域关系 E_A: $E_A = \{ (x, y) \mid x, y \in A \}$
- 恒等关系 I_A : $I_A = \{(x, x) \mid x \in A \}$

函数是一种特殊的关系

- 函数 $f: A \to B$
- $R = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$是一个从$A$到$B$的一个关系

关系的表示

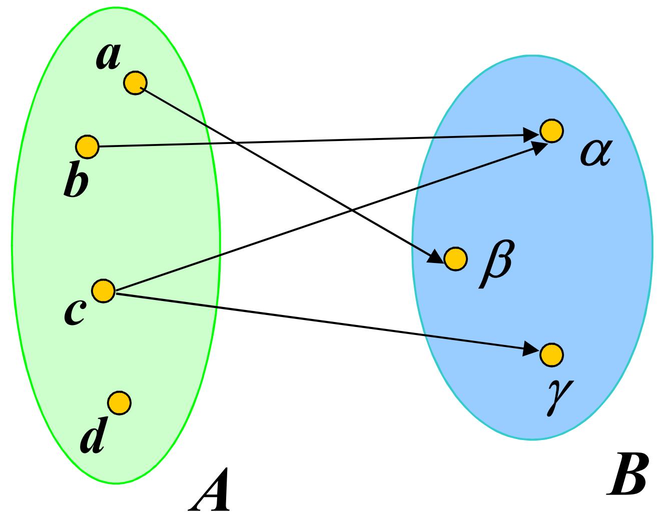
假设$A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ // 假设为有限集合

- 集合表示: $R_1=\{(a, \beta), (b, \alpha), (c, \alpha),(c, \gamma)\}$

0-1矩阵

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\
\begin{array}{c} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{array} &
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

有向图



二元关系和有向图

关系 $R \subseteq A \times B$ ⟷ 有向图 (V_D, E_D)

A和B是集合

有序对集合

$(x,y) \in R$

若$A=B$, R中存在序列：(x_1,x_2), (x_2,x_3),…,(x_{n-1},x_n)

顶点集 $V_D = A \cup B$

有向边集E_D

从x到y有一条边

图D中存在从 x_1 到 x_n 的长度为 n-1的通路

关系的性质：自反性 reflexivity

- 集合A上的关系 R 是:
  - 自反的 reflexive：定义为：对所有的 $a\in A$, $(a,a)\in R$
  - 反自反的 irreflexive：定义为：对所有的$a\in A$, $(a,a)\notin R$

注意区分"非"与"反"

- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1), (1,3), (2,2), (2,1), (3,3)\}$ 是自反的
  - $\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ 是反自反的
  - $\{(1,2), (2,2), (2,3), (3,1)\}$ 既不是自反的，也不是反自反的

自反性与恒等关系

- R 是 A 上的自反关系 $\Leftrightarrow$ $I_A \subseteq R$,

  这里I_A是集合A上的恒等关系,即: $I_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$

  直接根据定义证明：

  - $\Rightarrow$ 只需证明：对任意(a,b)，若$(a,b) \in I_{\mathrm{A}}$, 则$(a,b) \in R$
  - $\Leftarrow$ 只需证明：对任意的a, 若$a \in A$, 则$(a,a) \in R$

关系的性质：对称性 Symmetry

- 集合A上的关系R是:
  - 对称的 symmetric：定义为：若 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R$
  - 反对称的 anti-~：定义为：若$(a,b)\in R$ 且$(b,a)\in R$ ，则$a=b$
- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,3)\}$ 是对称的
  - $\{(1,2),(2,3),(2,2),(3,1)\}$ 是反对称的

理解对称性

- 关系R满足对称性：对任意(a,b)，若 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R$

  关系R是对称的$\Leftrightarrow \forall <a,b>(<a,b>\in R \Rightarrow <b,a>\in R)$

- 注意：$\varnothing$是对称关系。

- 反对称并不是对称的否定:

  (令：$A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$)

  - $\{(1,1),(2,2)\}$ 既是对称的，也是反对称的
  - $\varnothing$是对称关系，也是反对称关系。

对称性与逆关系

- R 是集合A上的对称关系 $\Leftrightarrow R^{-1}=R$
  - $\Rightarrow$ 证明一个集合等式 $R^{-1}=R$
    - 若$(a,b)\in R^{-1}$, 则$(b,a)\in R$, 由R的对称性可知$(a,b)\in R$, 因此：$R^{-1}\subseteq R$; 同理可得：$R\subseteq R^{-1}$;
  - $\Leftarrow$ 只需证明：对任意的(a,b) 若$(a,b)\in R$, 则$(b,a)\in R$

关系的性质：传递性 transitivity

- 集合A上的关系R是
  - 传递的 transitive: 若 $(a,b)\in$R, $(b,c)\in$R, 则 $(a,c)\in$R
- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ 传递的
  - $\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ 是非传递的
  - $\{(1,3)\}$?
  - $\varnothing$?

$$\text{关系R是传递关系} \Leftrightarrow \forall(a,b,c)(((a,b)\in R\wedge(b,c)\in R)\Rightarrow(a,c)\in R)$$

传递性与关系的乘幂

- 关系的复合(乘)运算满足结合律，可以用 R^n 表示
  $R\circ R\circ\ldots\circ R$　　(n是正整数)
- 命题：$(a,b)\in R^{\mathrm{n}}$ 当且仅当：存在$t_1,t_2,\ldots,t_{n\text{-}1}\in A$, 满足：$(a,t_1),(t_1,t_2),\ldots,(t_{n\text{-}2},t_{n\text{-}1}),(t_{n\text{-}1},b)\in R$。
  - 对n>=1用数学归纳法：n=1, trivial. 奠基n=2,直接由关系复合的定义可得；归纳基于：$\mathrm{R}^{\mathrm{n}}=\mathrm{R}^{\mathrm{n}\text{-}1}\circ\mathrm{R}$
- 集合A上的关系R是传递关系 $\Leftrightarrow R^2\subseteq R$
  - 必要性：$\Rightarrow$任取$(a,b)\in R^2$,根据上述命题以及R的传递性可得$(a,b)\in R$
  - 充分性：$\Leftarrow$ 若$(a,b)\in R$, $(b,c)\in R$, 则$(a,c)\in R^2$, 由$R^2\subseteq R$可得：$(a,c)\in R$，则 R是传递关系

一些常用关系的性质

	$=$	$\leq$	$<$	$\mid$	$\equiv_3$	$\varnothing$	E
自反	✓	✓	✗	✓	✓	✗	✓
反自反	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗
对称	✓	✗	✗	✗	✓	✓	✓
反对称	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗
传递	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

关系运算与性质的保持

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓	×	×
$R_1 \circ R_2$	✓	×	×	×	×

关系的运算（1）

- 关系是集合, 所有的集合运算对关系均适用
  - 例子:
    - 自然数集合上: “$<$” $\cup$ “$=$” 等同于 “$\leq$”
    - 自然数集合上: “$\leq$” $\cap$ “$\geq$”等同于“$=$”
    - 自然数集合上: “$<$” $\cap$ “$>$”等同于$\varnothing$

关系的运算（2）

- 与定义域和值域有关的运算
  - $\operatorname{dom} R = \{x \mid \exists y\, (x,y)\in R\}$
  - $\operatorname{ran} R = \{y \mid \exists x\, (x,y)\in R\}$
  - $R\uparrow A = \{(x,y) \mid x\in A \wedge xRy\} \subseteq R$
  - $R[A] = \{y \mid \exists x\, (x\in A \wedge (x,y)\in R)\} = \operatorname{ran}(R\uparrow A) \subseteq \operatorname{ran}R$
- 例：$A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,3,5,6\}$, A上关系R：

  $R=\{(1,2), (1,4),(2,3),(3,5),(5,2)\}$,

求 $R\uparrow B$、$R[B]$、$R(1)$和$R(2)$

关系的运算（3）

- 逆运算
  - $R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y,x)\in \mathrm{R}\}$
    - 注意:如果R是从A到B的关系,则R^{-1}是从B到A的。
  - $(R^{-1})^{-1} = R$
  - 例子：$(R_1\cup R_2)^{-1} = R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$
    - $(x, y) \in (R_1\cup R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x)\in(R_1\cup R_2)$
    - $\Leftrightarrow (y, x)\in R_1$ 或 $(y, x)\in R_2$
    - $\Leftrightarrow (x, y)\in R_1^{-1}$ 或 $(x, y)\in R_2^{-1}$

关系的运算（4）

- 关系的复合（合成, Composition）

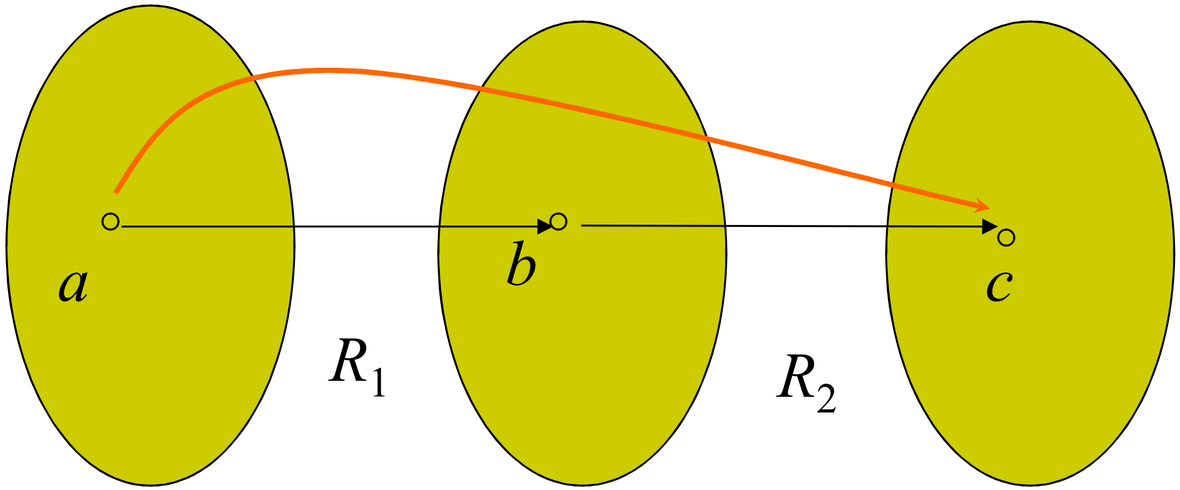
  设 $R_1 \subseteq A\times B$, $R_2 \subseteq B\times C$,

  R_1与R_2的复合（合成）, 记为 $R_2\circ R_1$, 定义如下：

  $R_2\circ R_1=\{(a, c)\in A\times C \mid \exists b\in B\ ((a, b)\in R_1 \wedge (b, c)\in R_2)\}$

复合关系的图示

- $(a, c) \in R_2 \circ R_1$ 当且仅当 $a \in A, c \in C$, 且存在$b \in B$，使得$(a, b) \in R_1, (b, c) \in R_2$



关系的复合运算：举例

- 设$A=\{a, b, c, d\}$, R_1, R_2为A上的关系，其中：

  $R_1 = \{ (a, a), (a, b), (b, d)\}$

  $R_2 = \{(a, d), (b, c), (b, d), (c, b)\}$

  则：

  $R_2 \circ R_1 = \{(a, d), (a, c), (a, d)\}$

  $R_1 \circ R_2 = \{(c, d)\}$

  $R_1^2 = \{(a, a), (a, b), (a, d)\}$

关系的复合运算的性质（1）

- 结合律
  - 给定$R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, $R_3 \subseteq C \times D$, 则：

$$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$

- 证明左右两个集合相等.

关系的复合运算的性质（2）

- 复合关系的逆关系
  - 给定$R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, 则：

$$(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$$

- 同样，证明左右两个集合相等
  - $(x, y) \in (R_2 \circ R_1)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R_2 \circ R_1 \Leftrightarrow$

$$\exists t \in B\ \ ((y, t) \in R_1 \wedge (t, x) \in R_2) \Leftrightarrow$$

$$\exists t \in B\ ((t, y) \in R_1^{-1} \wedge (x, t) \in R_2^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$(x, y) \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$$

关系的复合运算的性质（3）

- 对集合并运算满足分配律
  - 给定$F\subseteq A\times B$, $G\subseteq B\times C$, $H\subseteq B\times C$, 则：

    $(G\cup H)\circ F = (G\circ F) \cup (H\circ F)$
- 对集合交运算： $(G \cap H)\circ F \subseteq (G\circ F) \cap (H\circ F)$
  - 注意：等号不成立。

    $A=\{a\}$, $B=\{s,t\}$, $C=\{b\}$;

    $F=\{(a,s), (a,t)\}$, $G=\{(s,b)\}$, $H=\{(t,b)\}$;

    $G\cap H=\varnothing$, $(G\circ F) \cap (H\circ F)=\{(a,b)\}$

关系的闭包：一般概念

- 设R是集合A上的关系，P是给定的某种性质（如：自反、对称、传递），满足下列所有条件的关系R_1称为R的关于P的闭包:
  - $R \subseteq R_1$
  - R_1 满足性质P
  - 如果存在集合A上的关系R'，R'满足性质P 并包含R，则$R_1 \subseteq R'$
- 自反闭包r(R)、对称闭包s(R)、传递闭包t(R)

自反闭包的定义

- 设 R的是集合A上的关系，其自反闭包$r(R)$也是A上的关系，且满足：
  - $r(R)$满足自反性；
  - $R \subseteq r(R)$;
  - 对A上的任意关系R', 若R'也满足自反性，且也包含R，则$r(R)\subseteq R'$
- 例子
  - 令A={1,2,3}, R={(1,1), (1,3), (2,3), (3,2)}。则$r(R)$={(1,1), (1,3), (2,3), (3,2), (2,2), (3,3)}。

自反闭包的计算公式

- $r(R) = R \cup I_A$, I_A是集合A上的恒等关系

  (证明所给表达式满足自反闭包定义中的三条性质)

  1. 对任意 $x \in A$, $(x,x) \in I_A$, 因此, $(x,x) \in R \cup I_A$
  2. $R \subseteq R \cup I_A$
  3. 设 R' 集合A 上的自反关系，且$R \subseteq R'$, 则对任意 $(x,y) \in R \cup I_A$, 有$(x,y) \in R$, 或者 $(x,y) \in I_A$。对两种情况，均有 $(x,y) \in R'$, 因此, $R \cup I_A \subseteq R'$

对称闭包的计算公式

- $s(R) = R \cup R^{-1}$, 这里R^{-1}是R的逆关系
  - $s(R)$是对称的。对任意 $x,y \in A$, 如果 $(x,y) \in s(R)$, 则$(x,y) \in R$ 或者$(x,y) \in R^{-1}$, 即$(y,x) \in R^{-1}$, 或者 $(y,x) \in R$, $\therefore$ $(y,x) \in s(R)$
  - $R \subseteq s(R)$
  - 设R'是集合A上的对称关系, 并且$R \subseteq R'$, 则对任意$(x,y) \in s(R)$, 有$(x,y) \in R$, 或者$(x,y) \in R^{-1}$.
    - 情况1: $(x,y) \in R$, 则 $(x,y) \in R'$
    - 情况2: $(x,y) \in R^{-1}$, 则 $(y,x) \in R$, 于是 $(y,x) \in R'$。根据R'的对称性：$(x,y) \in R'$

  因此, $s(R) \subseteq R'$

连通关系

- R是集合A上的关系
- 定义集合A上的“R连通”关系R^*如下：
  - 对任意$a,b\in A$, $a\ R^*b$ 当且仅当：存在$t_1,t_2\ldots t_k \in A$(k是正整数)，满足$(a,t_1) \in R$; $(t_1,t_2)\in R$;…; $(t_k,b)\in R$。(可以表述为：从a到b之间存在长度至少为1的通路)
  - 显然：对任意$a,b\in A$, $a\ R^*b$ 当且仅当存在某个正整数k, 使得aR^kb。
  - 于是：$R^* = R^1\cup R^2\cup R^3\cup\ldots R^i\cup\ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$

传递闭包

$t(R) = R*$

1. 若 $(x, y) \in R*$, $(y, z) \in R*$, 则有 $s_1, s_2, \ldots, s_j$ 以及 $t_1, t_2, \ldots, t_k$,

满足: $(x, s_1), \cdots, (s_j, y), (y, t_1), \cdots, (t_k, z) \in R$,

因此, $(x, z) \in R*$.

2. $R \subseteq R^*$

3. 设 R' 是集合 A 上的传递关系, 且包含 R。若 $(x, y) \in R^*$,

则有 $t_1, t_2, \ldots, t_k$, 满足: $(x, t_1), \cdots, (t_k, y) \in R$,

于是 $(x, t_1), (t_1, t_2), \cdots, (t_k, y) \in R'$

根据 R' 的传递性, $(x, y) \in R'$.

利用公式证明闭包相等

- 证明：$r(s(R)) = s(r(R))$
  - $r(s(R)) = r(R \cup R^{-1})$

$$
\begin{aligned}
r(s(R)) &= r(R\cup R^{-1}) \\
&= (R\cup R^{-1})\cup I_A \\
&= (R\cup I_A)\cup(R^{-1}\cup I_A{}^{-1}) \quad \text{(注意：} I_A = I_A{}^{-1}\text{, 并用等幂率)} \\
&= (R\cup I_A)\cup(R\cup I_A)^{-1} \\
&= s(R\cup I_A) \\
&= s(r(R))
\end{aligned}
$$

注意：$r(s(R))$一般省略为$rs(R)$

等价关系的定义

- 满足性质：自反、对称、传递。
- "等于"关系的推广
- 例子
  - 对3同余关系: $R \subseteq Z \times Z$， xRy 当且仅当 $\frac{|x-y|}{3}$ 是整数。
  - $R \subseteq N \times N$， xRy iff 存在正整数k,l，使得$x^k=y^l$。
    - 自反: 若x是任意自然数，当然$x^k=x^k$;
    - 对称：若有k,l, 使$x^k=y^l$；也就有l,k, 使$y^l=x^k$；
    - 传递：若有k,l, 使$x^k=y^l$；并有m, n, 使$y^n=z^m$；则有 $x^{kn}=z^{ml}$

等价类

- R是非空集合A上的等价关系，$\forall x\in A$，等价类 $[x]_R=\{y|\ y\in A \wedge xRy\}$
- 每个等价类是A的一个非空子集。
- 例子：对3同余关系: $R\subseteq Z\times Z$， xRy 当且仅当 $\frac{|x-y|}{3}$ 是整数。
  - 3个等价类： $[0]=\{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$;

    $[1]=\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$;

    $[2]=\{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$

等价类的代表元素

- 对于等价类$[x]_R=\{\, y \mid y\in A \wedge xRy \,\}$，$x$称为这个等价类的代表元素.
- 其实，该等价类的每个元素都可以做代表元素：若xRy，则$[x]=[y]$
  - 证明：对任意元素t, 若$t\in[x]$, 则xRt, 根据R的对称性与传递性，且xRy, 可得yRt, 因此 $t\in[y]$, $\therefore [x]\subseteq[y]$; 同理可得$[y]\subseteq[x]$ 。

商集

- R是非空集合A上的等价关系，$\forall x \in A$，则其所有等价类的集合称为商集，A/R
- 集合$A=\{a_1,a_2, \ldots, a_n\}$上的恒等关系$I_A$是等价关系，商集$A/I_A=\{\{a_1\}, \{a_2\},\ldots, \{a_n\}\}$
- 定义自然数集的笛卡儿乘积上的关系R:

$$(a, b)R(c,d) \text{ 当且仅当 } a+d=b+c$$

证明这是等价关系，并给出其商集.

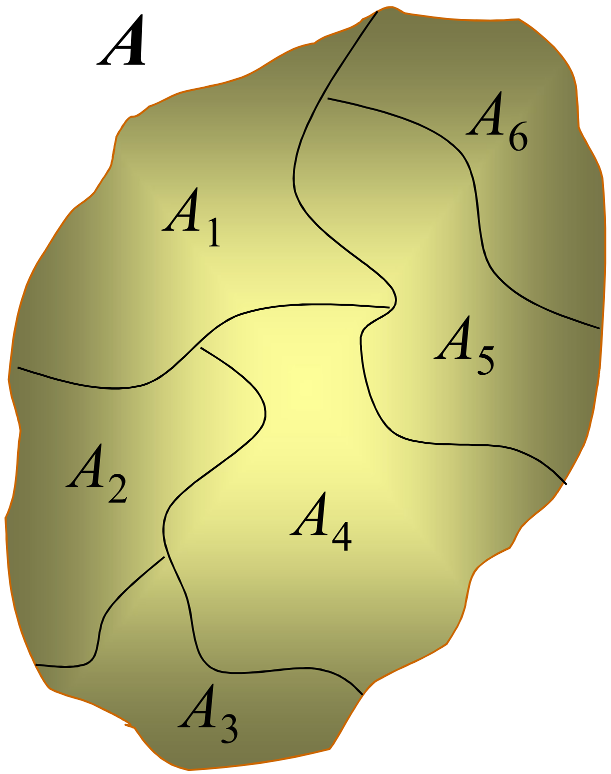
等价关系的一个例子

- R_1,R_2分别是集合X_1,X_2上的等价关系。定义$X_1\times X_2$上的关系S：

  $$(x_1,x_2)S\,(y_1,y_2) \text{ 当且仅当 } x_1R_1y_1 \text{ 且 } x_2R_2y_2$$

- 证明：S是$X_1\times X_2$上的等价关系
  - [自反性] 对任意$(x,y)\in X_1\times X_2$, 由R_1,R_2满足自反性可知，$(x,x)\in R_1$, $(y,y)\in R_2$; $\therefore$ $(x,y)S(x,y)$; S自反。
  - [对称性] 假设$(x_1,x_2)S\,(y_1,y_2)$, 由S的定义以及R_1,R_2满足对称性可知：$(y_1,y_2)S\,(x_1,x_2)$; S对称。
  - [传递性] 假设$(x_1,x_2)S\,(y_1,y_2)$, 且$(y_1,y_2)S\,(z_1,z_2)$, 则$x_1R_1y_1$, $y_1R_1z_1$, $x_2R_2y_2$, $y_2R_2z_2$, 由R_1,R_2满足传递性可知：$x_1R_1z_1$, 且$x_2R_2z_2$, 于是：$(x_1,x_2)S\,(z_1,z_2)$; S传递。

集合的划分



集合A的 划分, π, 是A的一组非空子集的集合，即 $\pi \subseteq \rho(A)$, 且满足：

1. 对任意 $x \in A$, 存在某个 $A_i \in \pi$, 使得 $x \in A_i$.

$$\text{i.e. } \bigcup_i A_i = A$$

2. 对任意 $A_i, A_j \in \pi$, 如果 $i \neq j$, 则：

$$A_i \cap A_j = \phi$$

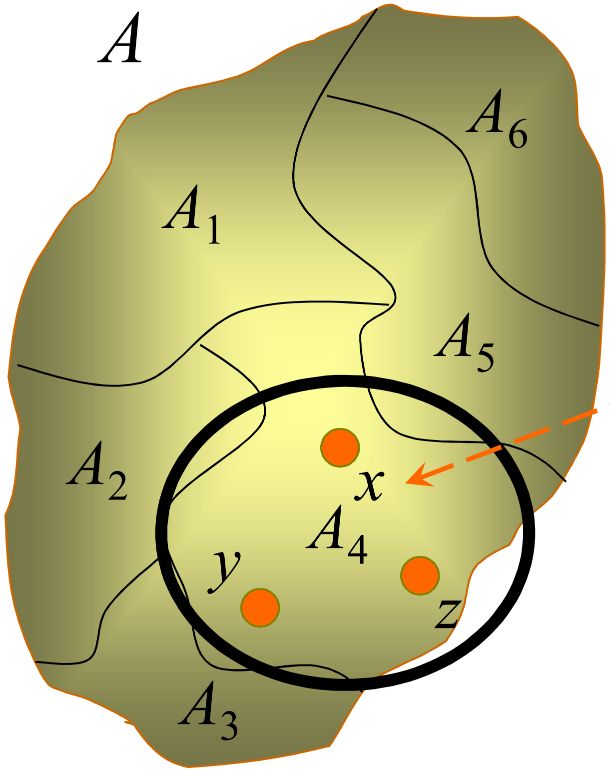
由等价关系定义的划分

- 假设R是集合A上的等价关系，给定$a \in A$, $R(a)$是由R 所诱导的等价类。
- $Q=\{R(x)|x \in A\}$是相应的商集。
- 容易证明，这样的商集即是A的一个划分：
  - 对任意 $a \in A$, $a \in R$(a) (R 是自反的)
  - 对任意 $a,b \in A$
    - $(a,b) \in R$ 当且仅当 $R(a)=R(b)$, 同时
    - $(a,b) \notin R$ 当且仅当 $R(a) \cap R(b)=\varnothing$

商集即划分– 证明

- 不相等的等价类必然不相交。换句话说，有公共元素的任意两个等价类必然相等。
- 证明：
  - 假设$R(a)\cap R(b)\neq\emptyset$, 设$c$是一个公共元素。
  - 根据等价类的定义，$(a,c)\in R$, $(b,c)\in R$
  - 对任意$x\in R(a)$, $(a,x)\in R$, 由R的传递性和对称性，可得$(c,x)\in R$, 由此可知$(b,x)\in R$, 即$x\in R(b)$, $\therefore R(a)\subseteq R(b)$
  - 同理可得：$R(b)\subseteq R(a)$。因此: $R(a)=R(b)$

根据一个划分定义等价关系



给定 A 上一个划分，可以如下定义A 上的等价关系 R :

$\forall x,y \in A$, $(x,y) \in R$ 当且仅当:

x,y 属于该划分中的同一块。

显然，关系 R 满足自反性、对称性、传递性。因此：R 是等价关系。

利用等价类解题：

- 证明：

从1,2,...,2000中任取1001个数，其中必有两个数x,y，满足$x/y=2^k$。

(k为整数)。

想起鸽笼原理没？

等价关系与划分：一个例子-解

- 建立1000个集合，每个集合包括1至2000之间的一个奇数以及该奇数与2的k次幂的乘积，但最大不超过2000。可以证明这1000个集合的集合是集合{1,2,3,..., 2000}上的一个划分。注意任意两个1到2000之间的正整数x,y在同一划分块中当且仅当$x/y=2^k$。(k为整数)。
- 定义集合{1,2,3,..., 2000}上的一个关系R，任意x,y，xRy当且仅当$x/y=2^k$。易证这是一个等价关系。其商集即上面的划分。

相容关系与覆盖

- 如果R是自反的和对称的，则称R是A上的相容关系。
  - R的最大相容类B满足：
    - 任一$x \in B$,都与B中所有其它的元素有相容关系。
    - A-B中没有与B中所有元素有相容关系的元素。
- 相容关系R的最大相容类的集合称为A的完全覆盖

偏序关系(Partial Order)

- **定义**（**偏序关系**）：非空集合A上的**自反**、**反对称**和**传递**的关系称为A上的偏序关系，记为：$\preccurlyeq$
- 设$\preccurlyeq$为偏序关系，若$(a, b) \in \preccurlyeq$，则记为$\boldsymbol{a \preccurlyeq b}$，读作"$a$小于或等于$b$"

实例

集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系.

小于或等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

偏序关系（续）

定义： 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系，

$x,y \in A$, x 与 y 可比 $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$.

任取两个元素 x 和 y，可能有下述几种情况发生：

$x \prec y$(或 $y \prec x$)， $x = y$， x 与 y 不是可比的.

定义： R 为非空集合 A 上的偏序关系，

$\forall x,y \in A$, x 与 y 都是可比的，则称 R 为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义： $x,y \in A$，如果 $x \prec y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$，则称 y 覆盖 x.

例如{1,2,4,6}集合上的整除关系，2 覆盖 1，4 和 6 覆盖 2. 但 4 不覆盖 1.

偏序集(poset)与哈斯图

1．偏序集

定义： 集合 A 和 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 一起叫做偏序集，记作 $(A,\preccurlyeq)$.

实例：

整数集合 Z 和数的小于或等于关系 $\leq$ 构成偏序集 $(Z,\leq)$

集合 A 的幂集 $P(A)$ 和包含关系 $R_{\subseteq}$ 构成偏序集 $(P(A),R_{\subseteq})$.

2．哈斯图

利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

特点：

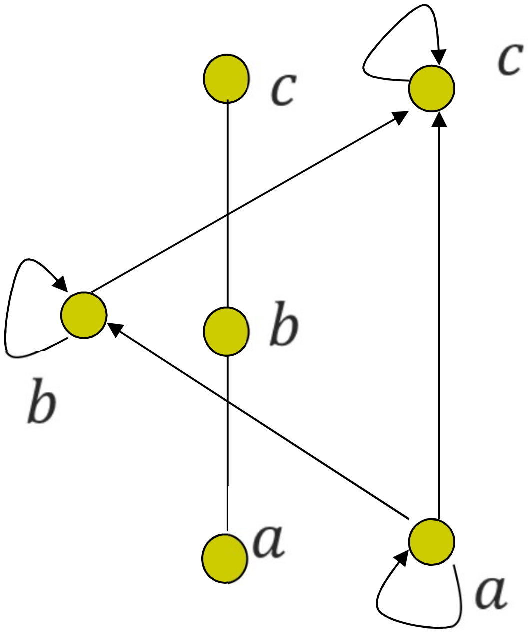
- 每个结点没有环
- 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前
- 具有覆盖关系的两个结点之间连边

偏序集（续）

- 例：字典序(lexicographic order)与偏序集
  - 给定两个偏序集 $(A, \preccurlyeq_A)$与 $(B, \preccurlyeq_B)$，在 $A \times B$ 上定义新关系“$\preccurlyeq$”：
    $(a, b) \preccurlyeq (c, d) \Leftrightarrow a \prec c \vee (a = c \wedge b \preccurlyeq d)$

- 易证，$(A \times B, \preccurlyeq)$ 是一个偏序集。

哈斯图



将偏序关系简化为哈斯图：

- 省略所有顶点上的环
- 省略所有因传递关系而引出的边
- 根据箭头的方向自下而上重排列所有顶点，而后将所有的有向边替换为无向边

哈斯图的例子

例 偏序集($\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $R_{整除}$)和($P(\{a,b,c\}),R_{\subseteq}$)的哈斯图.

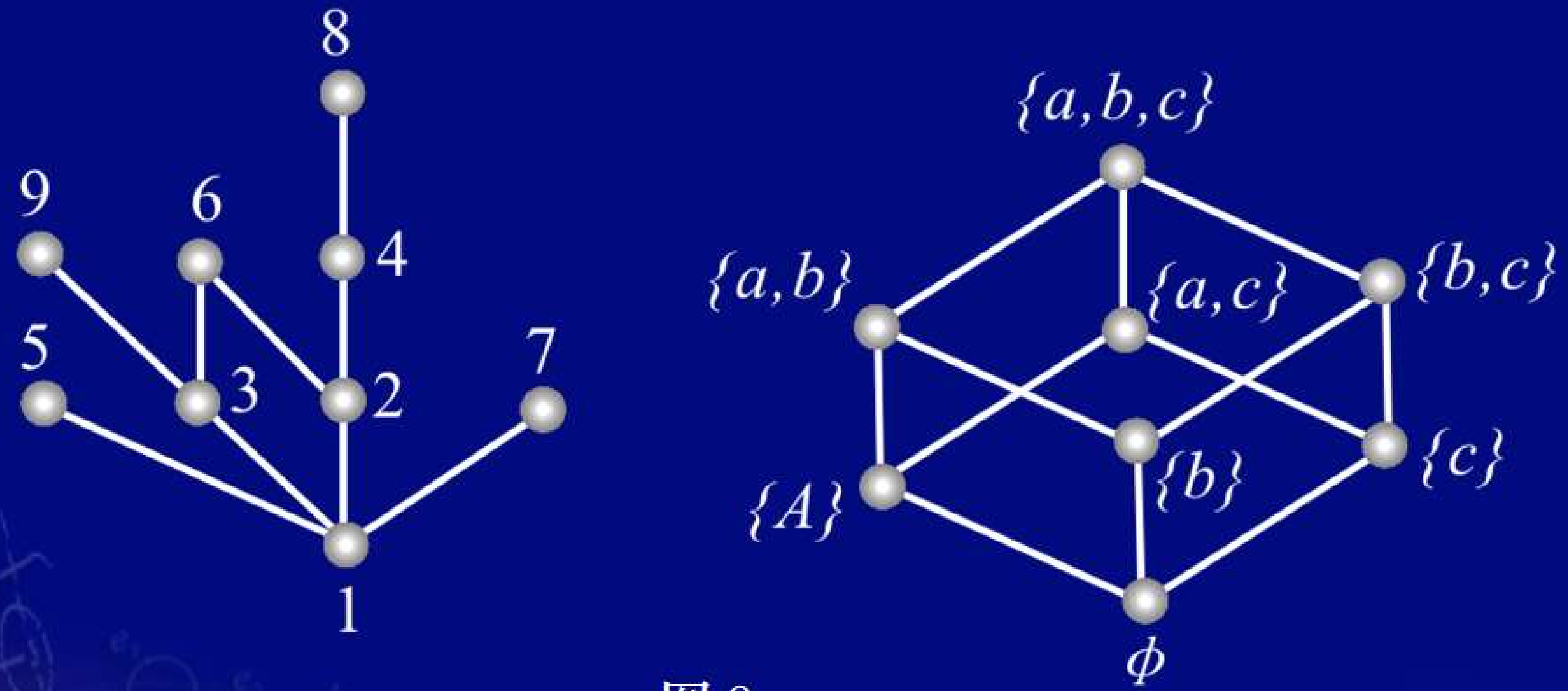


图 8

偏序集中的特殊元素及其性质

1. 最小元、最大元、极小元、极大元

定义： 设$(A,\preccurlyeq)$为偏序集，$B\subseteq A, y\in B$.

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立，则称 y 为 B 的最小元.

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立，则称 y 为 B 的最大元.

(3) 若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立，则称 y 为 B 的极小元.

(4) 若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立，则称 y 为 B 的极大元.

性质：

- 对于有穷集，极小元和极大元一定存在，还可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集中的特殊元素及其性质（续）

2．下界、上界、下确界（最大下界）、上确界（最小上界）

定义：设 $(A, \preccurlyeq)$ 为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$.

（1）若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ 成立，则称 y 为 B 的上界.

（2）若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$ 成立，则称 y 为 B 的下界.

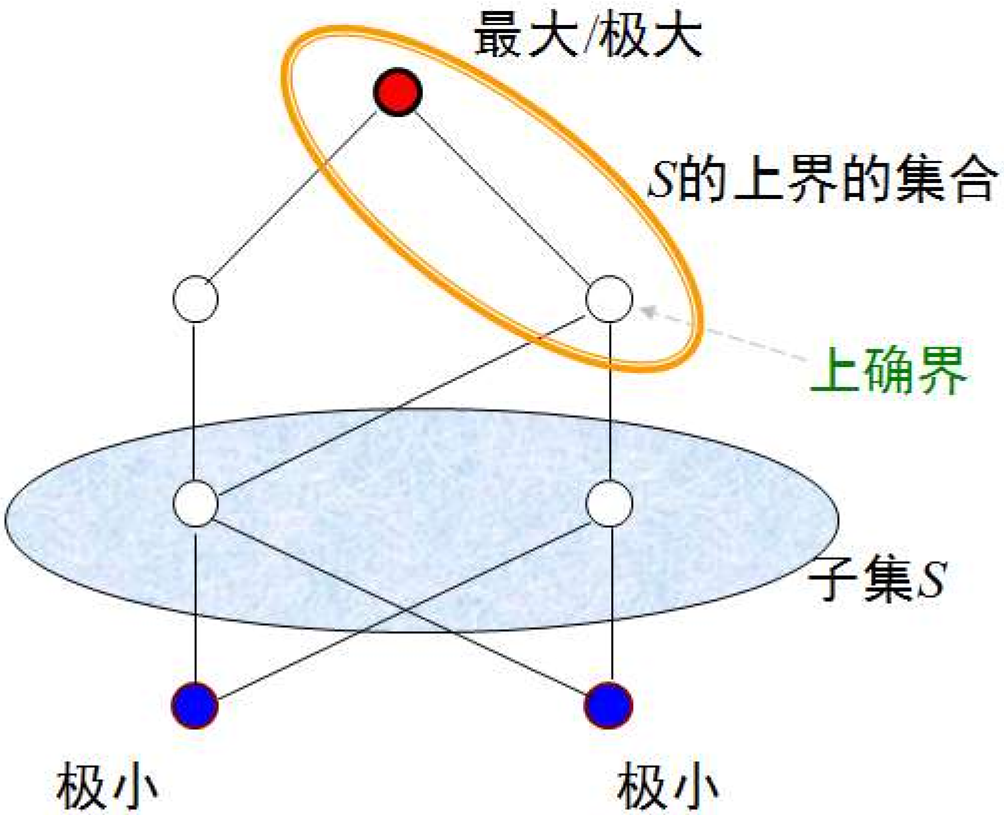
（3）令 $C = \{y \mid y$ 为 B 的上界$\}$，则称 C 的最小元为 B 的最小上界或上确界.

（4）令 $D = \{y \mid y$ 为 B 的下界$\}$，则称 D 的最大元为 B 的最大下界或下确界.

性质：

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在，则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

从哈斯图看特殊元素



偏序集中的特殊元素及其性质（续）

例　设偏序集$(A,\preccurlyeq)$如下图所示，

求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元.

设 $B=\{b,c,d\}$，求 B 的下界、上界、下确界、上确界.

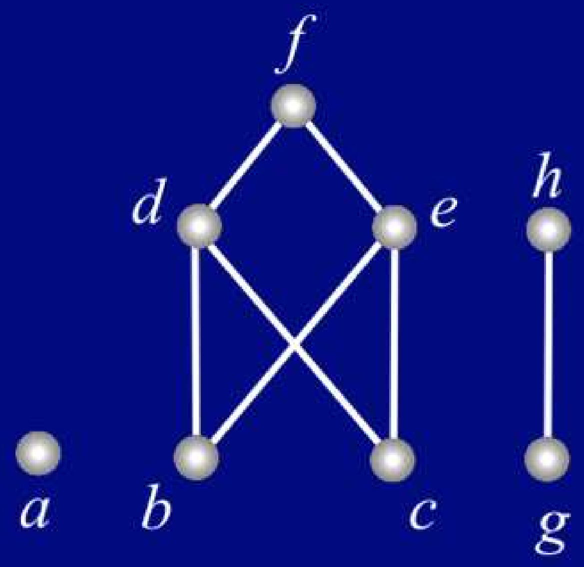


图 10

解　极小元：a, b, c, g；　极大元：a, f, h；没有最小元与最大元.

B 的下界和最大下界都不存在，上界有 d 和 f，最小上界为 d.

偏序集中的特殊元素及其性质（续）

4．设偏序集（A,R）的哈斯图如图所示.

（1）写出 A 和 R 的集合表达式

（2）求该偏序集中的

极大元

极小元

最大元

最小元

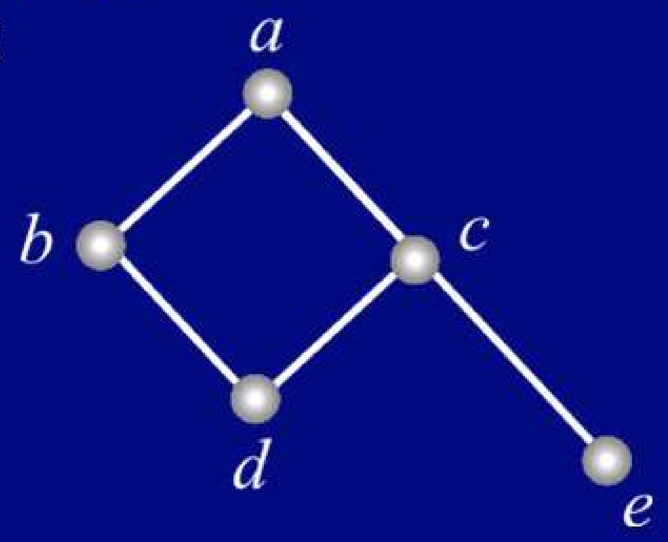


图11

解 （1）$A=\{a,b,c,d,e\}$

$R=\{(d,b),(d,a),(d,c),(e,c),(e,a),(b,a),(c,a)\}\cup I_A$

（2）极大元和最大元是 a，极小元是 d,e；没有最小元.

偏序集与格

- 格（lattice）作为一个代数系统可以通过两种方式进行定义：
  - (1) 通过偏序集与偏序关系定义
  - (2) 通过普通集合与特殊运算定义
- 本讲我们仅从偏序的角度去定义格，并研究其中的若干基本运算

偏序关系与格（续）

- 格作为**偏序集**的定义：

定义：设$(S, \preccurlyeq)$是偏序集，如果$\forall x,y \in S$，$\{x,y\}$都有最小上界和最大下界，则称S关于偏序$\preccurlyeq$作成一个格.

由于最小上界和最大下界的惟一性，可以把求$\{x,y\}$的最小上界和最大下界看成x与y的二元运算$\vee$和$\wedge$，即$x \vee y$和$x \wedge y$分别表示x与y的最小上界和最大下界.

注意：本章中出现的$\vee$和$\wedge$符号只代表格中的运算，而不再有其他的含义.

偏序关系与格（续）

2．格的实例

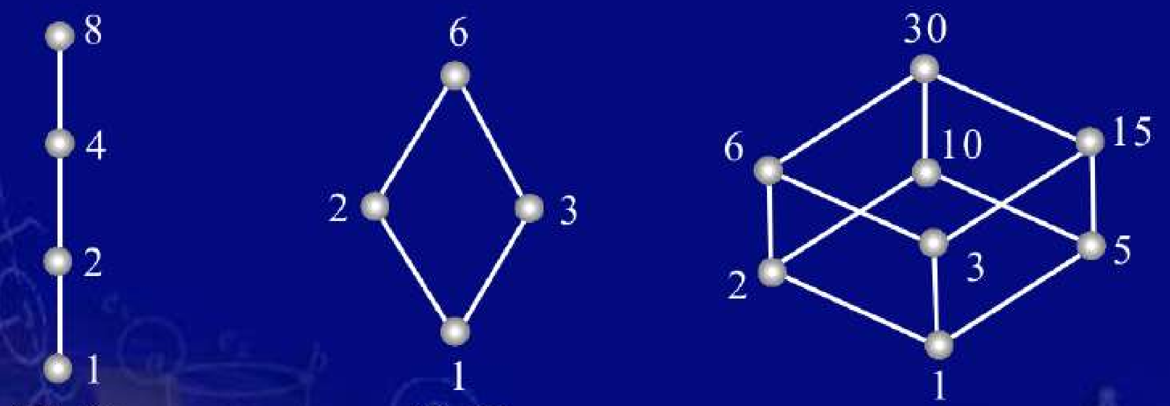
例 设 n 是正整数，S_n 是 n 的正因子的集合.

D 为整除关系，则偏序集 (S_n,D) 构成格.

$\forall x,y \in S_n$，$x \vee y$ 是 $\mathrm{lcm}(x,y)$，即 x 与 y 的最小公倍数.

$x \wedge y$ 是 $\gcd(x,y)$，即 x 与 y 的最大公约数.

下图给出了格 (S_8,D)，(S_6,D) 和 (S_{30},D).



(S_8,D) (S_6,D) (S_{30},D)

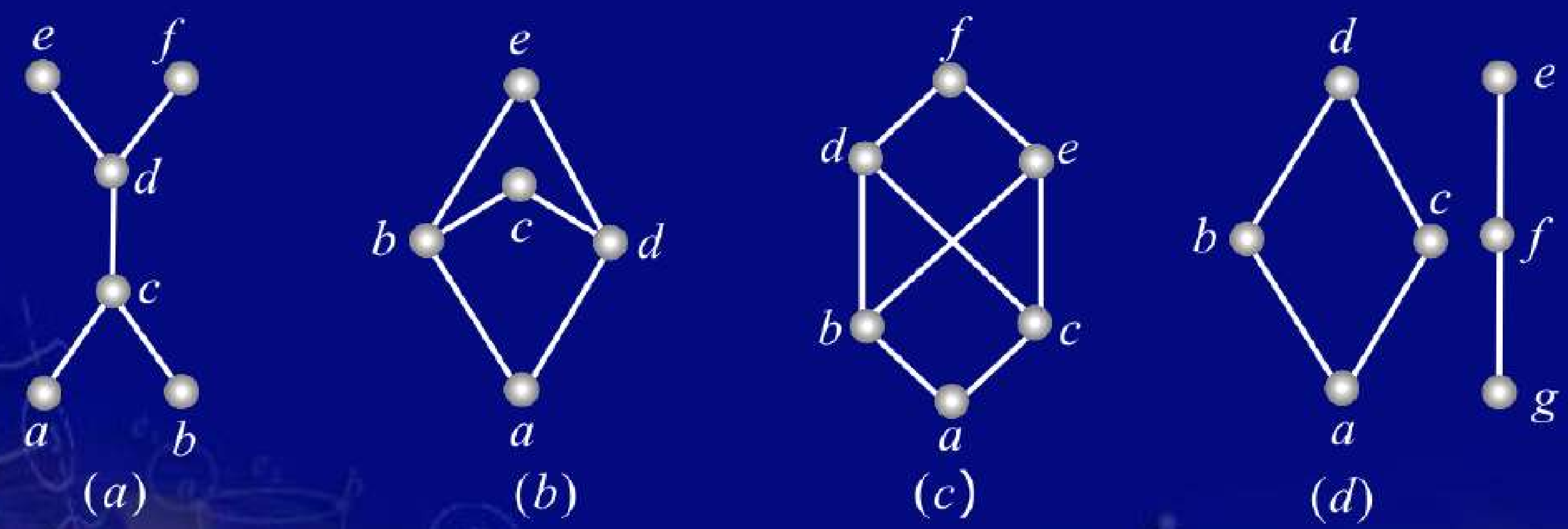
偏序关系与格（续）

例　判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

（1）（$P(B)$,⊆ ），其中 $P(B)$是集合 B 的幂集.

（2）（Z, ≤），其中 Z 是整数集，≤为小于或等于关系.

(3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.



格的对偶原理

对偶原理

(1) 对偶命题

定义 ： 设f是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$和$\wedge$的命题. 令$f^*$是将$f$中的$\preccurlyeq$替换成$\succcurlyeq$, $\succcurlyeq$替换成$\preccurlyeq$, $\vee$替换成$\wedge$, $\wedge$替换成$\vee$所得到的命题. 称f^*为f的对偶命题.

例如，在格中令

f是 $(a \vee b) \wedge c \preccurlyeq c$,

f^*是 $(a \wedge b) \vee c \succcurlyeq c$.

格的对偶原理（续）

（2）格的对偶原理

设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 等的命题.

若 f 对一切格为真，则 f 的对偶命题 f^* 也对一切格为真.

例如，如果对一切格 L 都有

$$\forall a,b \in L,\ a \wedge b \preccurlyeq a$$

那么对一切格 L 都有

$$\forall a,b \in L,\ a \vee b \succcurlyeq a$$

习题二

- 1，4，5-（1），6，8，12，18-（1），22，24，33，35.