图论（三）

带权图和最短通路

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 引言
- **Dijkstra**算法
- 旅行商问题（**TSP**）

带权图与最短通路问题

- 带权图：三元组 (V, E, W)，(V, E)是图，W是从E到非负实数集的一个函数。$W(e)$表示边e的权。
- 一条通路上所有边的权的和称为该通路的长度。
- 两点之间长度最小的通路称为两点之间的最短通路，不一定是唯一的。
- 单源点最短路问题

给定带权图 $G(V, E, W)$并指定一个源点，确定该源点到图中其它任一顶点的最短路（长度和路径）。

Dijkstra最短路径的算法思想(1959)

- 源点s到顶点v的最短路径若为s…uv，则s…u是s到u的最短路径。

- (n-1)条最短路径按照其长度的非减次序求得，设它们的相应端点分别为u_1，…u_{n-1}，最短路径长度记为$d(s, u_i)$， $i=1,\ldots n-1$.

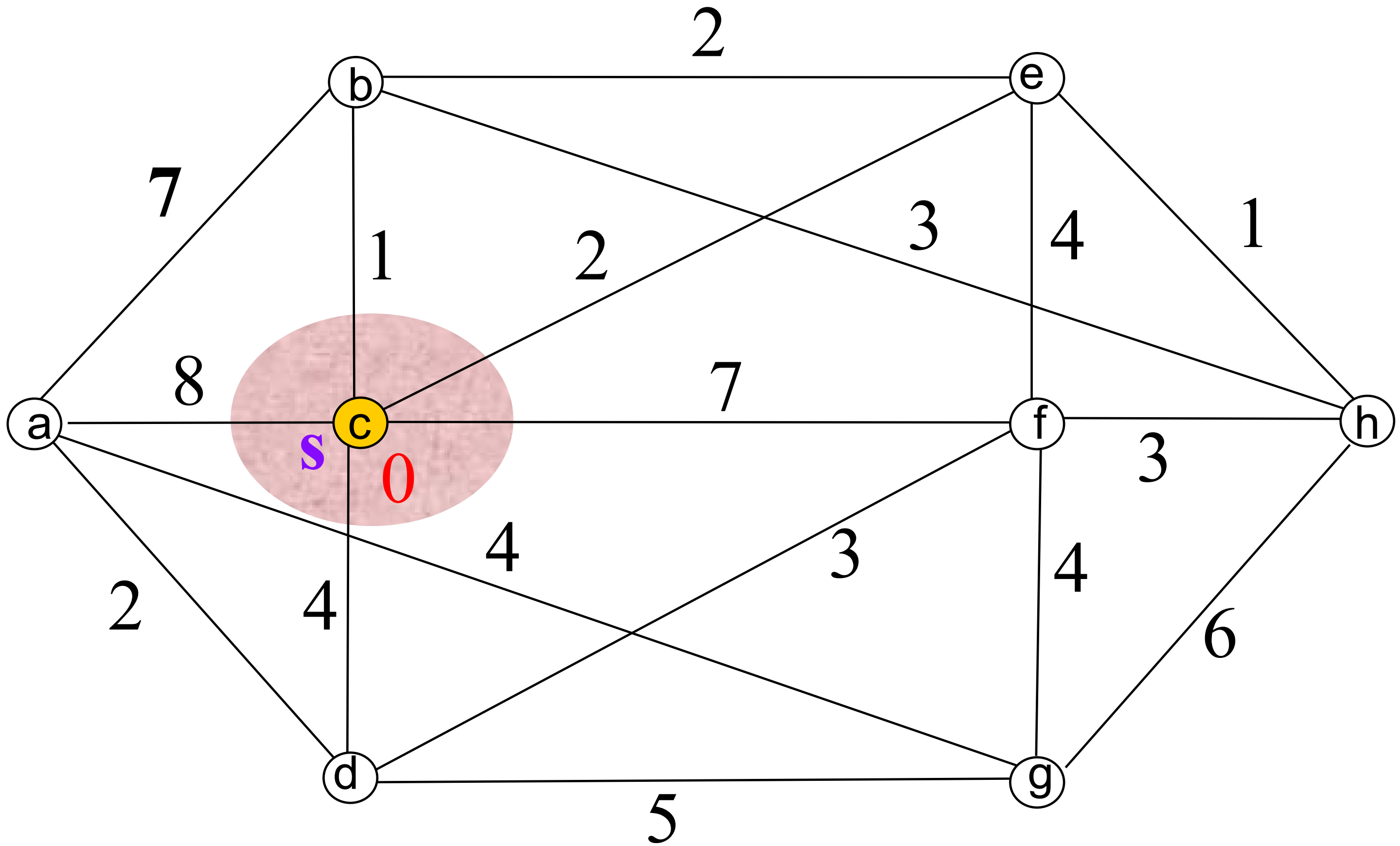
- 假设前i条最短路径已知，第(i+1)条最短路径长度：

$$d(s, u_{i+1})=\min\{d(s, u_j) +W(u_j, u_{i+1}) \mid j=1,\ldots i\}$$

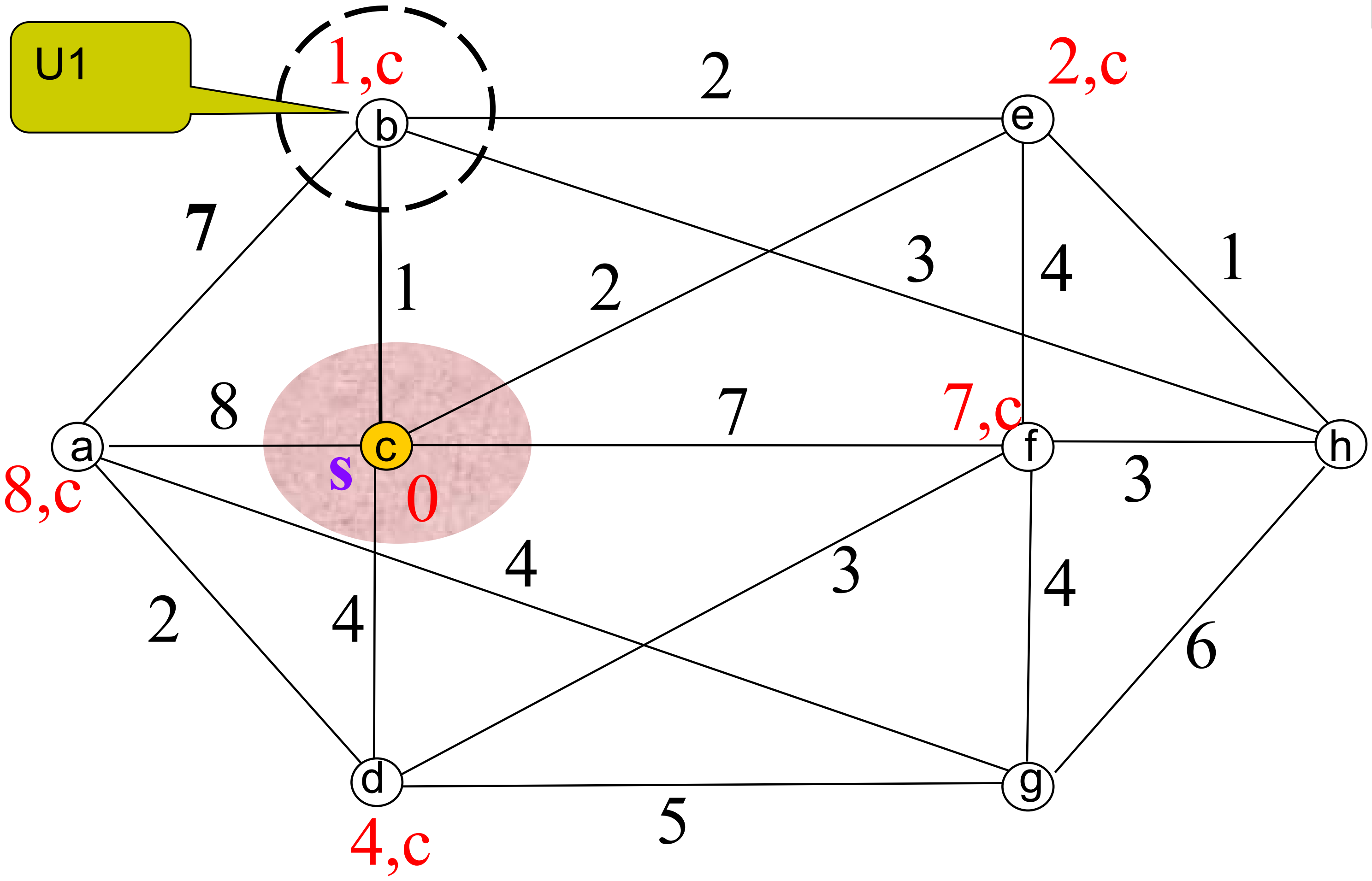
求最短路径的Dijkstra算法

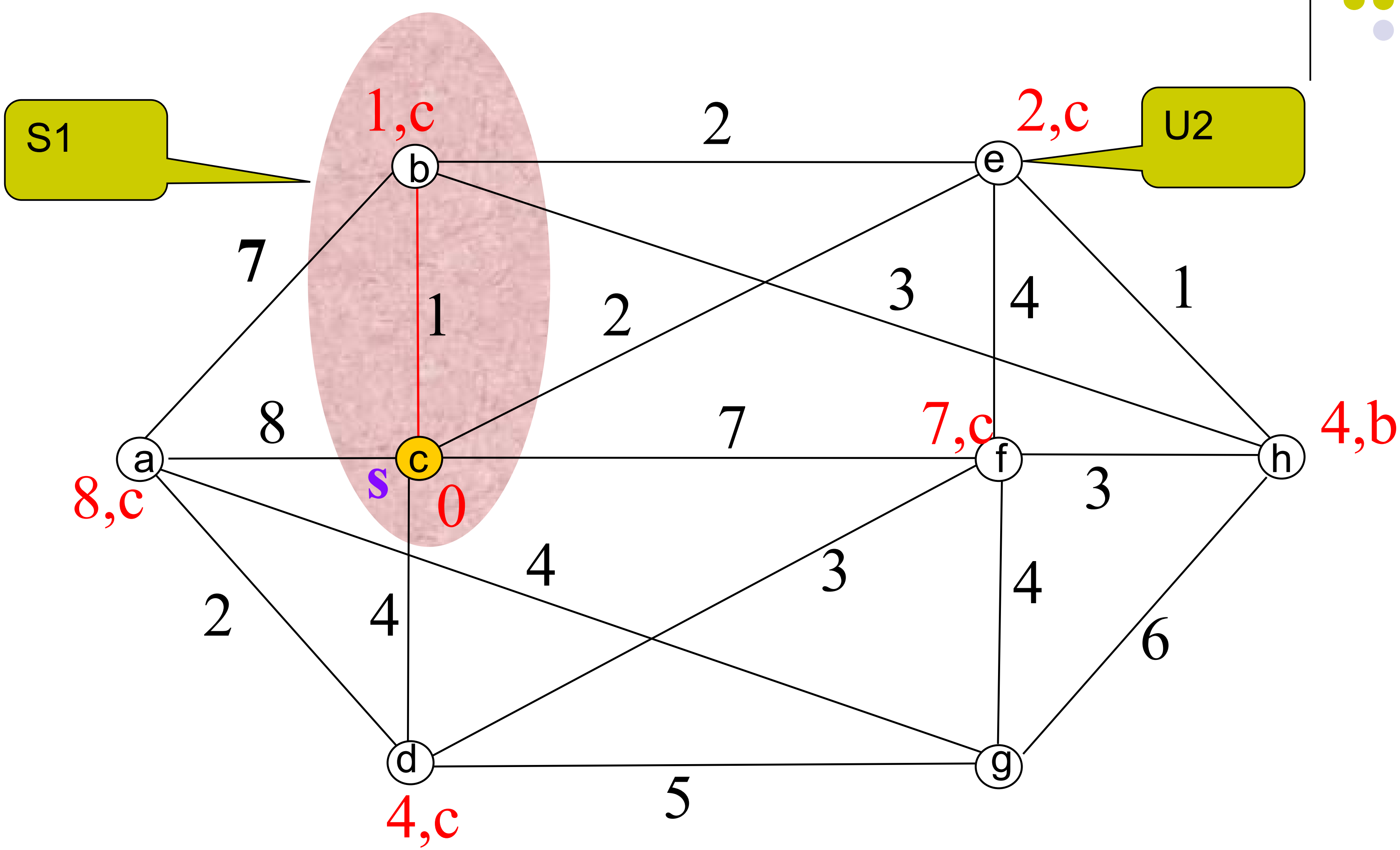
- 输入：连通带权图G，$|V_G|=n$, 指定顶点$s \in V_G$
- 输出：每个顶点v的标注$(L(v), u)$, 其中：
  - $L(v)$即从s到v的最短路径长度（目前可得的）
  - u是该路径上v前一个顶点。

求最短路的一个例子

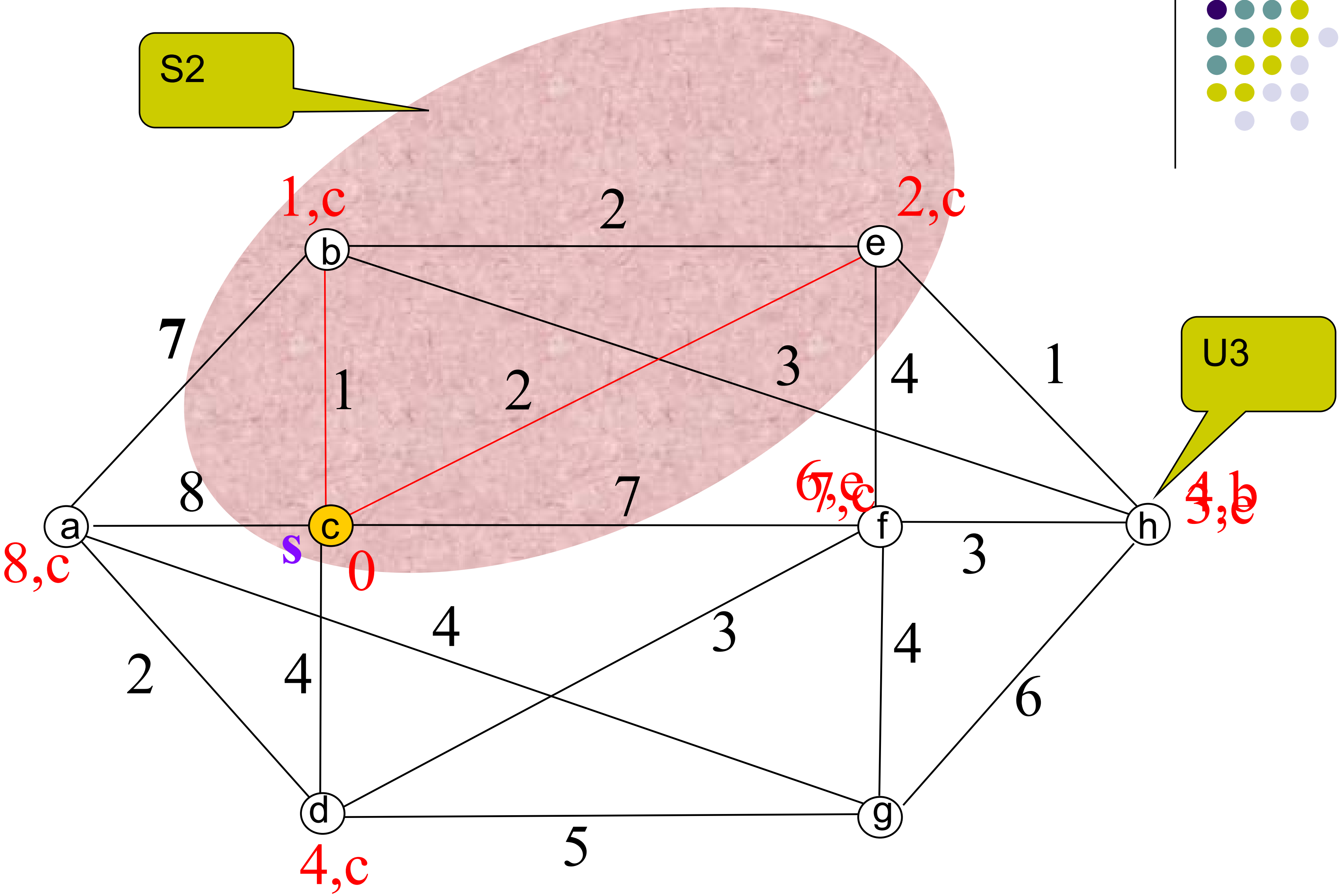


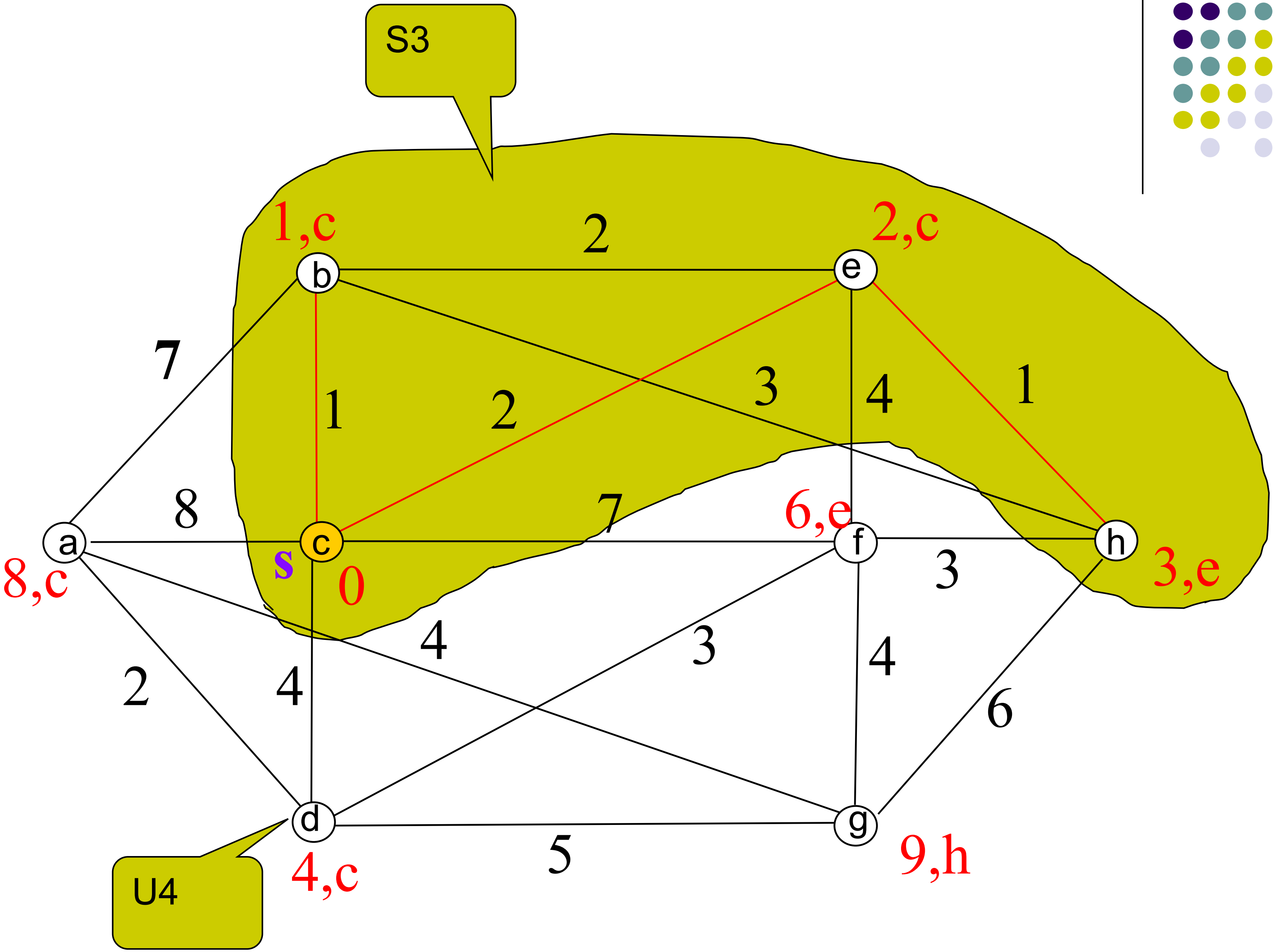
求最短路的一个例子

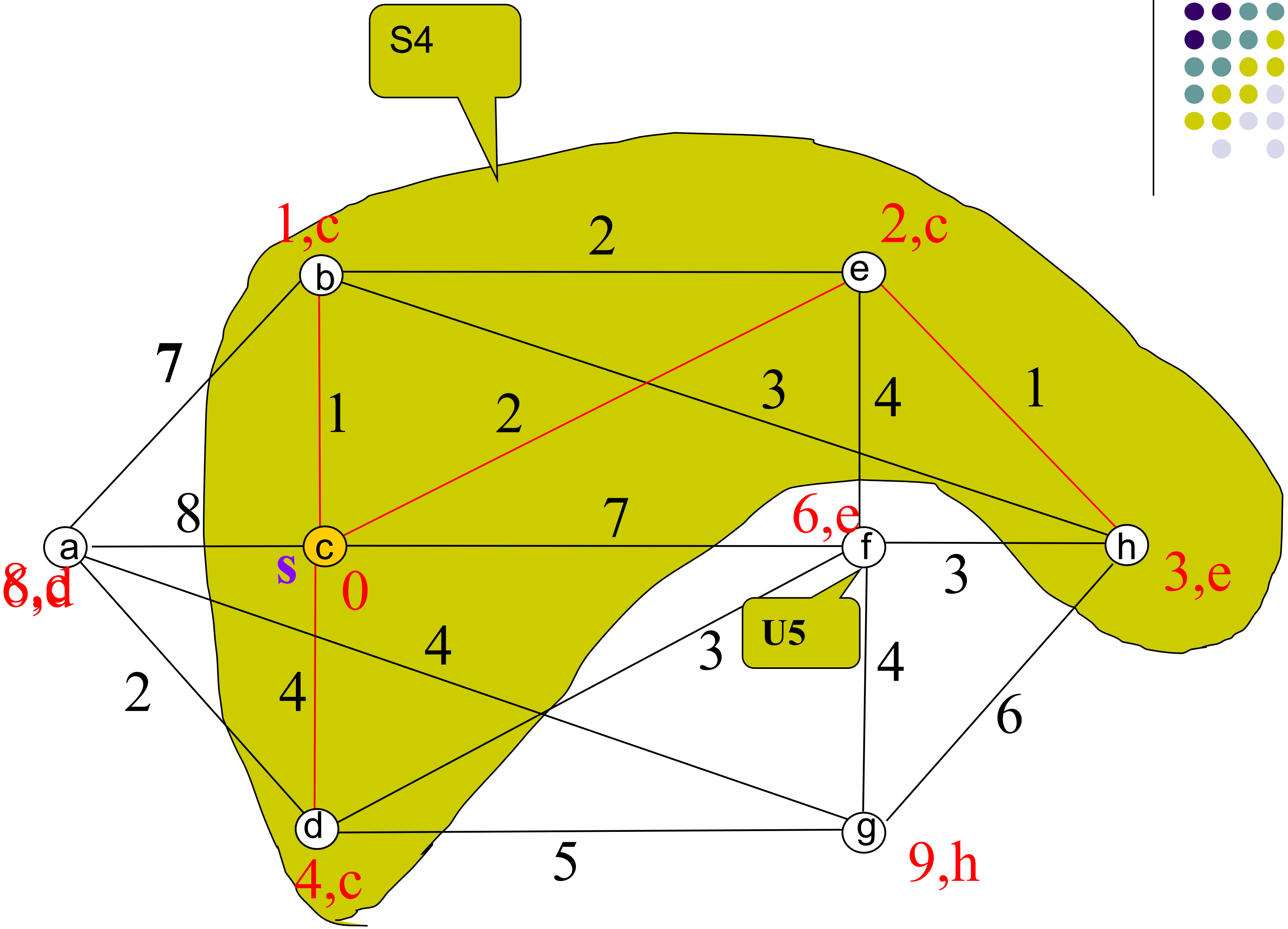




S1
U2
1,c
2,c
2
7
1
2
3
4
1
8
7
7,c
4,b
8,c
s
0
3
4
3
4
2
4
6
5
4,c
a
b
c
d
e
f
g
h

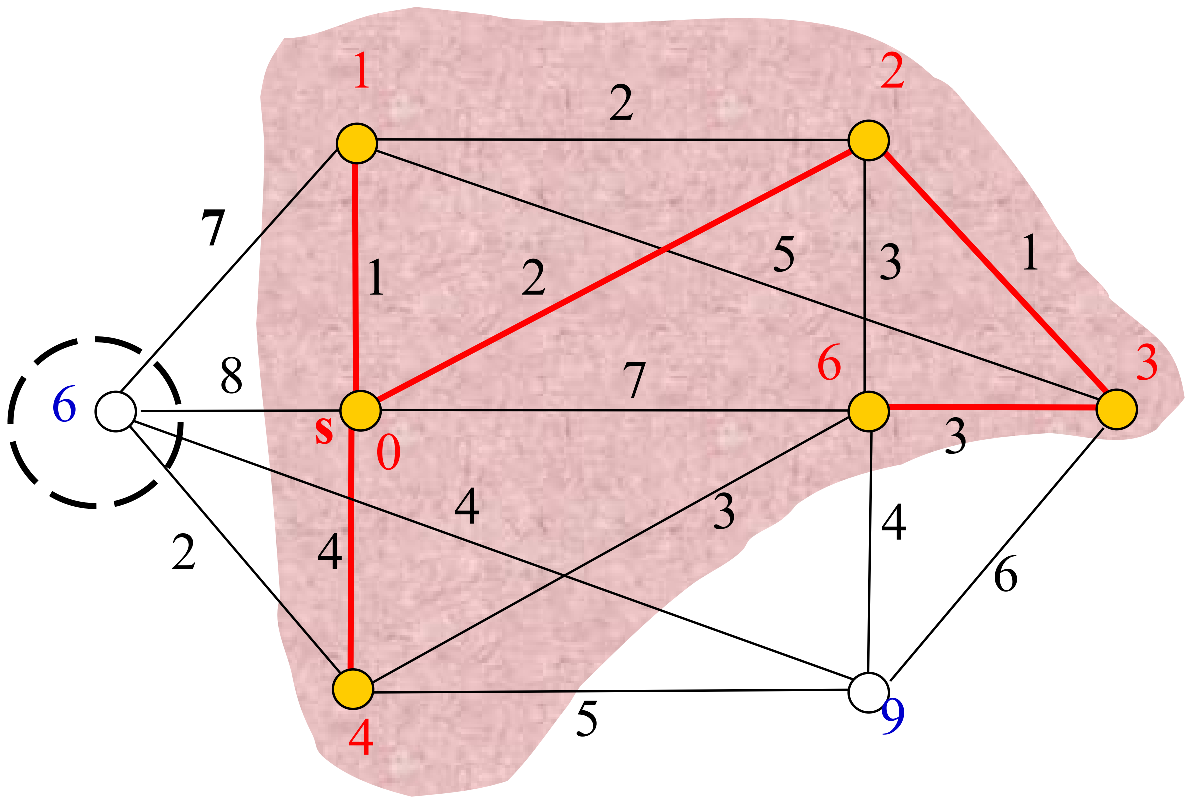

S2
U3
1,c
2,c
8,c
0
4,c
6,e
7,c
4,b
3,e
s
a
b
c
d
e
f
g
h
2
7
1
2
3
4
1
8
7
3
4
3
2
4
4
6
5


S3
U4
1,c
2,c
3,e
6,e
8,c
4,c
9,h
0
s
a
b
c
d
e
f
g
h
2
7
1
2
3
4
1
8
7
3
4
3
2
4
4
6
5

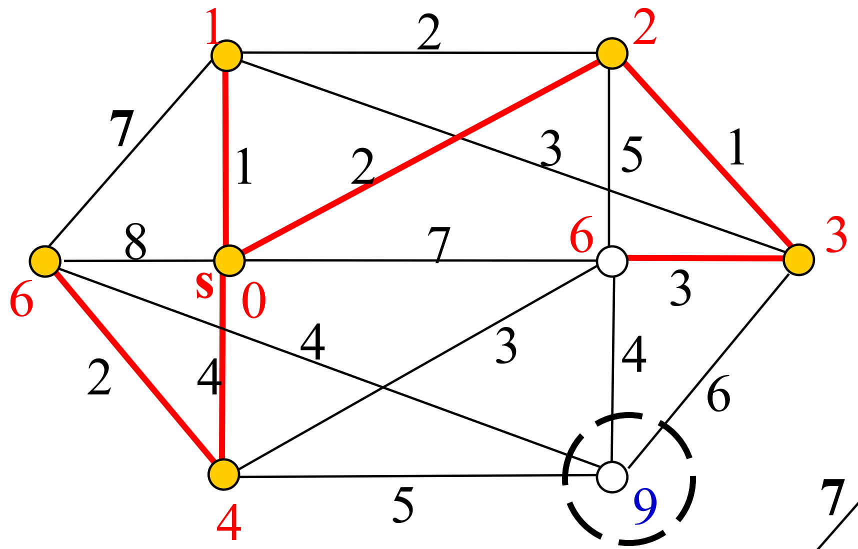


S4
U5
1,c
2,c
6,e
3,e
8,d
0
s
4,c
9,h
a
b
c
d
e
f
g
h
7
2
1
2
3
4
1
8
7
3
4
2
4
3
4
6
5

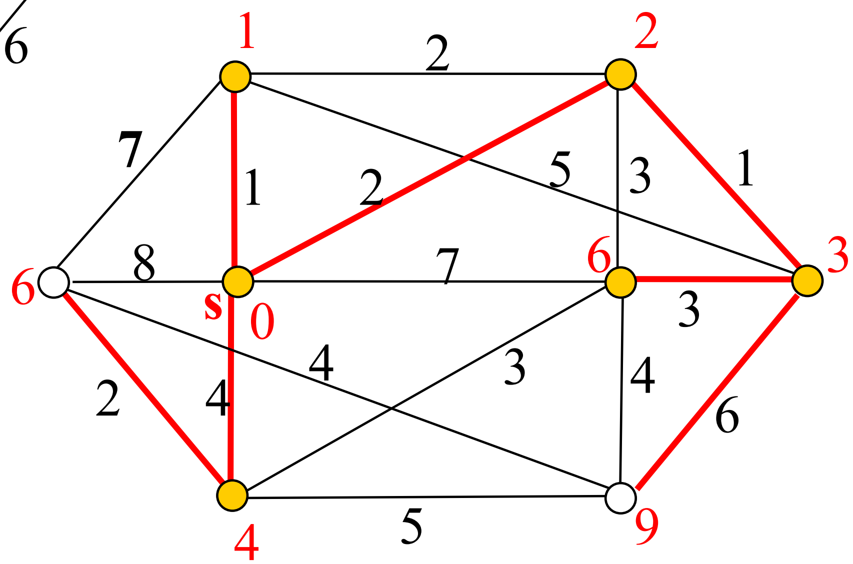
求最短路的一个例子(续)



求最短路的一个例子(续)



1
2
2
7
1
2
3
5
1
8
7
6
3
6
s
0
3
4
3
4
2
4
6
5
9
4



1
2
2
7
1
2
5
3
1
8
7
6
3
6
s
0
3
4
3
4
2
4
6
5
9
4

Dijkstra算法的描述

1. 初始化：$i=0$, $S_0=\{s\}$, $L(s)=0$, 对其它一切$v\in V_G$, 将$L(v)$ 置为∞。若$n=1$，结束。
2. $\forall v\in S_i'=V_G-S_i$, 比较$L(v)$和$L(u_i)+W(u_i, v)$的值 $(u_i\in S_i)$

   如果$L(u_i)+W(u_i, v)<L(v)$, 则将v的标注更新为$(L(u_i)+W(u_i, v), u_i)$，

   即： $L(v)=\min\{ L(v), \min_{u\in Si}\{L(u)+W(u,v)\} \}$
3. 对所有S_i'中的顶点，找出具有最小$L(v)$的顶点v, 作为u_{i+1}
4. $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$
5. $i = i+1$; 若$i=n-1$, 终止。否则：转到第2步。

Dijkstra算法的分析

- 可终止性
  - 计数控制
- 正确性

  需证明当算法终止时
  - $L(v)=d(s, v)$对一切v成立。
  - 由标记中的诸u_i确定的路径是一条最短路径

    (这里$d(s,v)$是s到v的最短路径长度，即距离。)
- 复杂性
  - $O(n^2)$

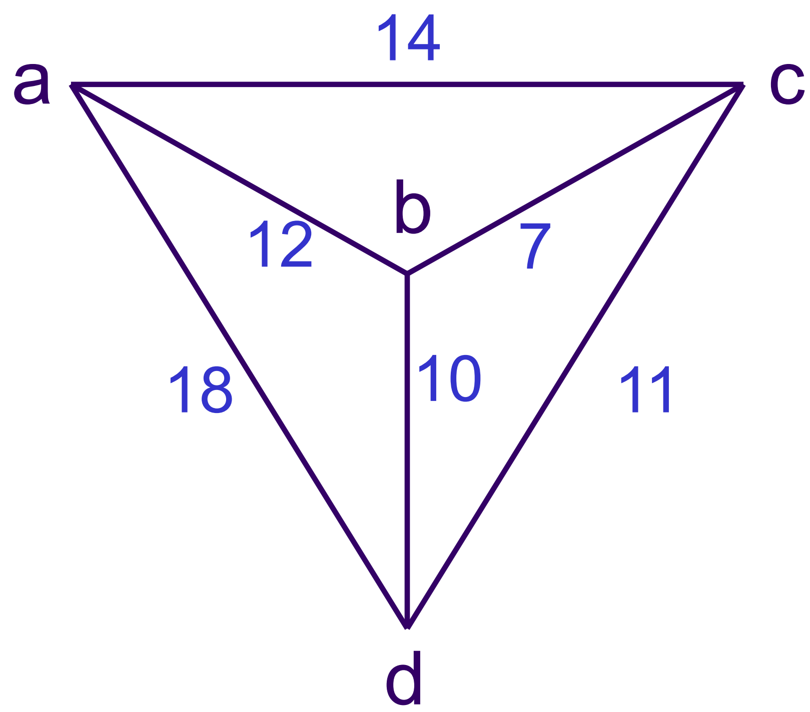
旅行商问题
(Travelling Salesman Problem, TSP)

- n个城市间均有道路，但距离不等，旅行商从某地出发，走过其它n-1城市各一次，最后回到原地，如何选择最短路线？
- 数学模型：
  - 无向带权图G：顶点对应于城市，边对应于城市之间的道路，道路长度用相应边的权表示。
  - 问题的解：权最小的哈密尔顿回路。
  - G是带权完全图，总共有(n-1)!/2条哈密尔顿回路。因此，问题是如何从这(n-1)!/2条中找出最短的一条。

(含25个顶点的完全图中不同的哈密尔顿回路有约3.1×10^{23}条，若机械地检查，每秒处理10^9条，需1千万年。)

旅行商问题

- 一个货郎（销售员）生活在城市a，假定访问的城市是d, b, c，然后回到a，求完成这次访问的最短路径的距离.



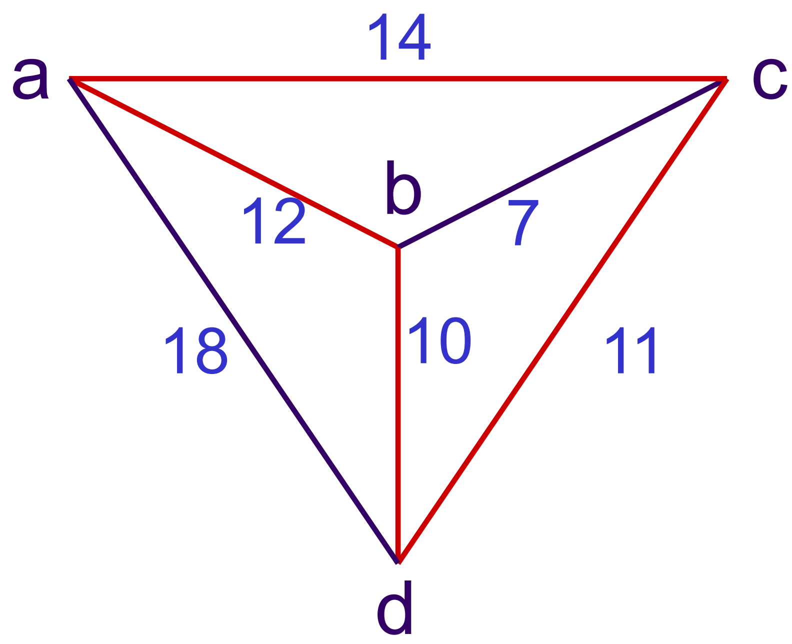
旅行商问题

- 解：列出哈密尔顿回路, 并求其距离：

  （1）（abcda）＝（12+7+11+18）＝48

  （2）（acbda）＝（14+7+10+18）＝49

  （3）（abdca）＝（12+10+11+14）＝47



旅行商问题

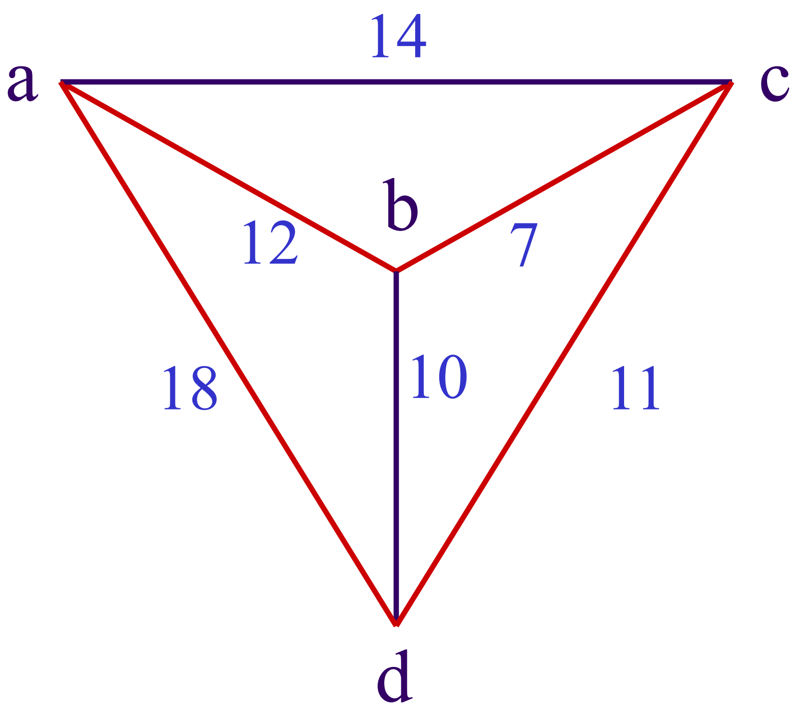
- 哈密尔顿回路（路径）的最短路径问题！
- 下面介绍一种最邻近算法：

（1）选择任一顶点作为始点，找出离始点距离最小的顶点，形成一条边的初始路径；

（2）设u是最新加到这条路径上的顶点，从不在这条路径上的所有顶点中选择一个与u距离最小的顶点，把连接u与此结点的边加入路径中；重复执行直到G中的各顶点均含在这条路径中。

旅行商问题

（3）把始点到最后加入的顶点的边放入路径中得到一条哈密尔顿回路，并为近似最短的哈密尔顿回路.



旅行商问题(TSP)的研究进展

- （在最坏情况下）时间复杂性为多项式的算法?
- （在最坏情况下）时间复杂性为多项式的近似算法
  - 保证: **W≤W'≤ cW (c=3/2)**, 误差为**50%**
- 实际应用中，已有好的算法能够在几分钟内处理**1000**个节点的规模，误差在**2%**。