图论（二）

欧拉图和汉密尔顿图

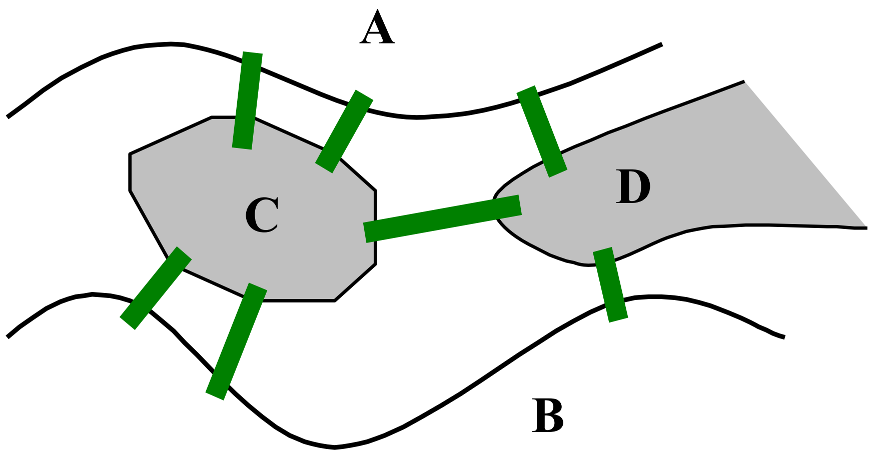
南京大学计算机科学与技术系

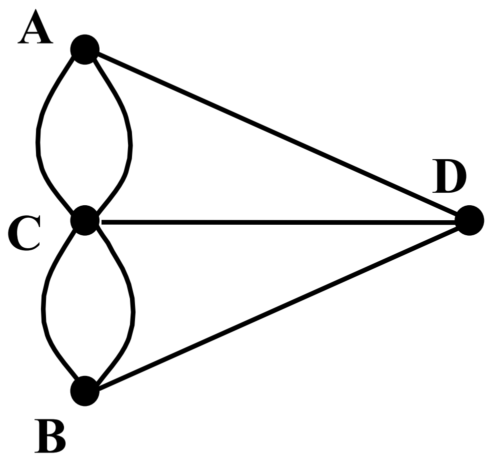
内容提要

- 欧拉通路/回路
- 欧拉图的充要条件
- 构造欧拉回路的**Fleury**算法
- 哈密尔顿通路/回路
- 哈密尔顿图的必要和充分条件
- 哈密尔顿图的应用

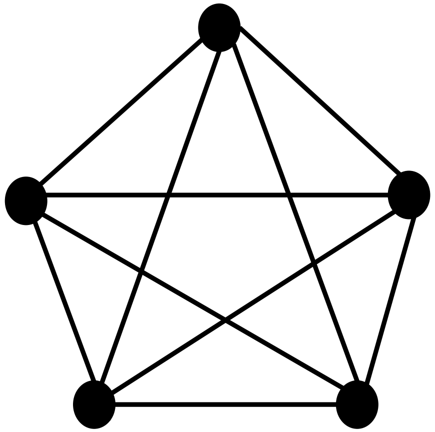
Königsberg七桥问题

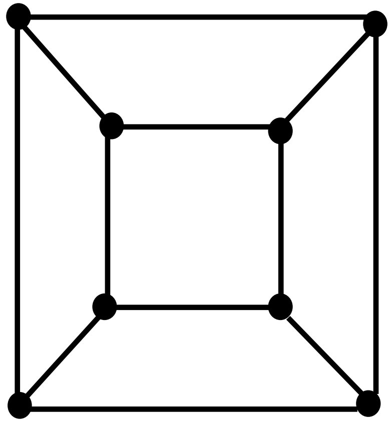
- 问题的抽象：
  - 用顶点表示对象-“地块”
  - 用边表示对象之间的关系-“有桥相连”
  - 原问题等价于：“右边的图中是否存在包含每条边一次且恰好一次的回路？”

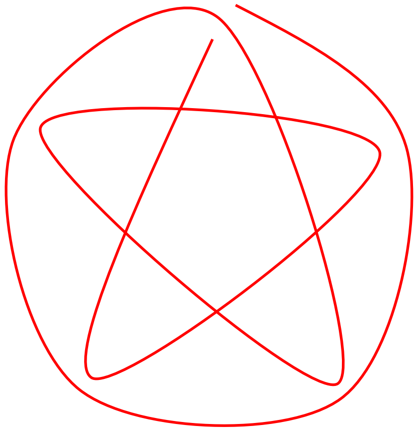




“一笔划”问题







?

欧拉通路和欧拉回路

- 定义：包含图（无向图或有向图）中每条边的简单通路称为*欧拉通路*。

注意：欧拉通路是简单通路（边不重复），但顶点可重复

- 定义：包含图中每条边的简单回路称为*欧拉回路*。
- 如果图G中含欧拉回路，则G称为*欧拉图*。如果图G中有欧拉通路，但没有欧拉回路，则G称为*半欧拉图*。

//备注：通常假设G是连通的。

欧拉图中的顶点度数

- 连通图G是欧拉图 当且仅当 G中每个顶点的度数均为偶数。
  - 证明：

⇒设C是G中的欧拉回路，则$\forall v \in V_G$, $d(v)$必等于v在C上出现数的2倍(起点与终点看成出现一次)。

⇐可以证明：

（1）G中所有的边可以分为若干边不相交的初级回路。

（2）这些回路可以串成一个欧拉回路。

全偶度图中的回路

- 若图G中任一顶点均为偶度点，则G中所有的边包含在若干边不相交的简单回路中。
- 证明：对G的边数m施归纳法。
  - 当m=1, G是环，结论成立。
  - 对于k≥1，假设当m≤k时结论成立。
  - 考虑m=k+1的情况：注意$\delta_G \geq 2$, G中必含简单回路，记为C，令G'=G-E_C，设G'中含s个连通分支，显然，每个连通分支内各点均为偶数(包括0)，且边数不大于k。则根据归纳假设，每个非平凡的连通分支中所有边含于没有公共边的简单回路中，注意各连通分支以及C两两均无公共边，于是，结论成立。

若干小回路串成欧拉回路

- 若连通图G中所有的边包含在若干边不相交的简单回路中，则G中含欧拉回路。
  - 证明：对G中简单回路个数d施归纳法。当d=1时显然。
  - 假设$d \le k$($k \ge 1$)时结论成立。考虑$d=k+1$.
  - 按某种方式对k+1个简单回路排序，令G'=G-E(C_{k+1})，设G'中含s个连通分支，则每个非平凡分支所有的边包含在相互没有公共边的简单回路中，且回路个数不大于k。由归纳假设，每个非平凡连通分支G_i均为欧拉图，设其欧拉回路是C_i'。因G连通，故C_{k+1}与诸C_i'都有公共点。
  - G中的欧拉回路构造如下：从C_{k+1}上任一点(设为v_0)出发遍历C_{k+1}上的边，每当遇到一个尚未遍历的C_i'与C_{k+1}的交点(设为v_i'), 则转而遍历C_i'上的边，回到v_i'继续沿C_{k+1}进行。

关于欧拉图的等价命题

- 设G是非平凡连通图，以下三个命题等价：

(1) G是欧拉图。

(2) G中每个顶点的度数均为偶数。

(3) G中所有的边包含在相互没有公共边的简单回路中。

半欧拉图的判定

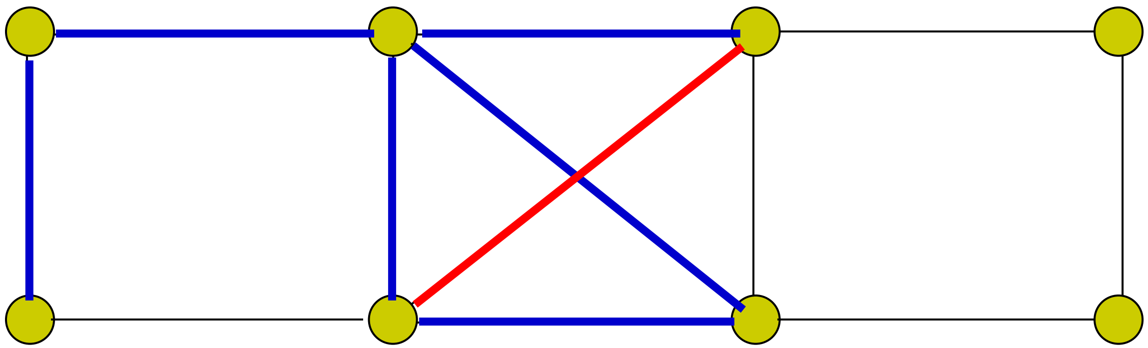
- 设G是连通图，G是半欧拉图 *当且仅当* G恰有两个奇度点。
  - 证明:

$\Rightarrow$ 设*P*是G中的欧拉通路(非回路)，设*P*的始点与终点分别是u,v, 则对G中任何一点x, 若x非u,v，则x的度数等于在*P*中出现次数的2倍，而u,v的度数则是它们分别在*P*中间位置出现的次数的两倍再加1。

$\Leftarrow$ 设G中两个奇度顶点是u,v, 则G+uv是欧拉图，设欧拉回路是C, 则C中含uv边，$\therefore$ C-uv是G中的欧拉通路。(这表明：如果试图一笔画出一个半欧拉图，必须以两个奇度顶点为始点和终点。)

构造欧拉回路

思想：在画欧拉回路时，已经经过的边不能再用。因此，在构造欧拉回路过程中的任何时刻，假设将已经经过的边删除，剩下的边必须仍在同一连通分支当中。



构造欧拉回路-Fleury算法

- 算法:
  - 输入：欧拉图G
  - 输出：简单通路$P = v_0e_1v_1e_2,\ldots,e_iv_ie_{i+1},\ldots,e_mv_m$, 其中包含了$E_G$中所有的元素。

1. 任取$v_0 \in V_G$, 令$P_0=v_0$;
2. 设$P_i=v_0e_1v_1e_2,\ldots,e_iv_i$, 按下列原则从$E_G$-$\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中选择$e_{i+1}$。
   (a) e_{i+1}与v_i相关联;
   (b) 除非别无选择，否则e_{i+1}不应是G-$\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中的割边。
3. 反复执行第2步，直到无法执行时终止。

Fleury算法的证明

- 算法的终止性显然。
- 设算法终止时，$P_m = v_0e_1v_1e_2,\ldots,e_iv_ie_{i+1},\ldots,e_mv_m$,
- 其中诸e_i互异是显然的。只须证明：

  (1) P_m是回路，即$v_0=v_m$。

  (2) P_m包括了G中所有的边。

令$G_i=G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$

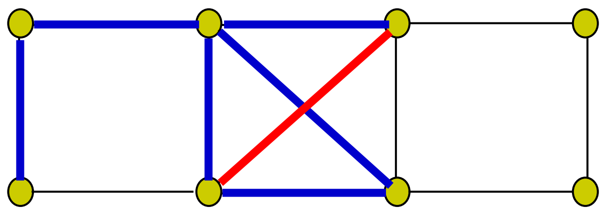
(1) (证明是回路)假设$v_0 \neq v_m$。由算法终止条件，在G_m中已没有边与v_m相关联。假设除最后一次外，v_m在P_m中出现k次，则v_m的度数是$2k+1$, 与G中顶点度数是偶数矛盾。

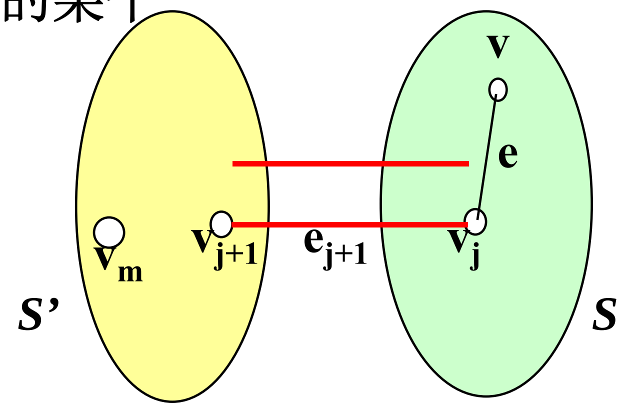
Fleury算法的证明(续)

(2) (证明含所有边)假设P_m没有包括G中所有的边，令G_m中所有非零度顶点集合为S（非空），令$S' = V_G - S$, 则$v_m \in S'$。

考察序列$e_1, e_2, \ldots e_j, e_{j+1}, \ldots, e_m$。假设j是满足$v_j \in S$, 而$v_{j+1} \in S'$的最大下标。如果没有这样的j，G就不连通，矛盾。因为P_m的终点在S'中，因此e_{j+1}一定是G_j中的割边。

令e是在G_j中与v_j相关联的异于e_{j+1}的边(非零度点一定有), 根据算法选择e_{j+1}(割边)的原则，e也一定是割边。但是，G_m中任意顶点的度数必是偶数，e在G_m中的连通分支是欧拉图，e在G_m的某个欧拉回路中，不可能是G_j的割边。矛盾。





有向欧拉图

- 有向图中含所有边的有向简单回路称为有向欧拉回路。
- 含有向欧拉回路的有向图称为有向欧拉图。

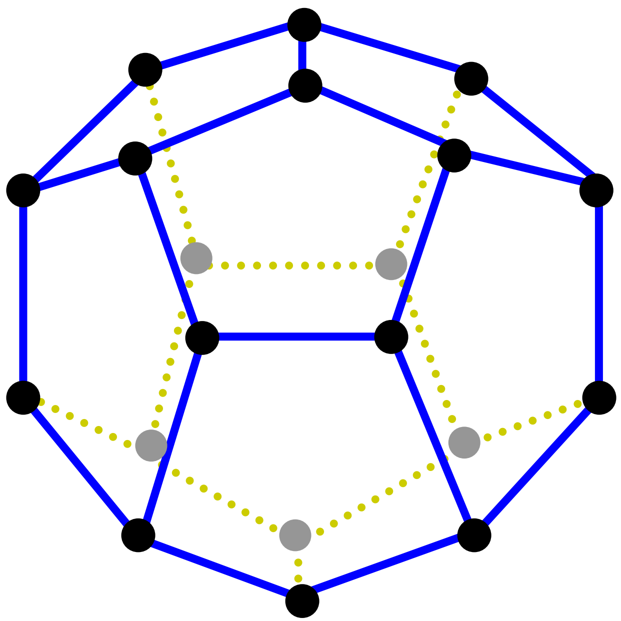
下面的等价命题可以用于有向欧拉图的判定：

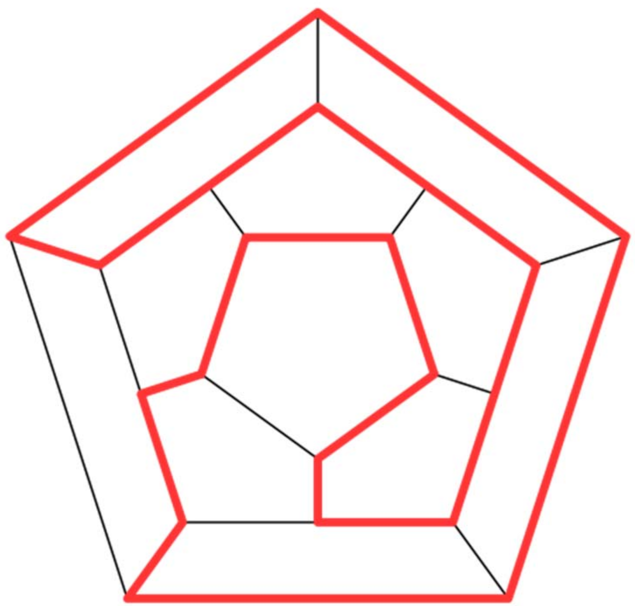
- 若**G**是弱连通的有向图，则下列命题等价：
  - **G**中含有向欧拉回路。
  - **G**中任一顶点的入度等于出度。
  - **G**中所有的边位于若干个边互不相交的有向简单回路当中。

(证明与无向欧拉图类似。)

周游世界的游戏

- 沿着正十二面体的棱寻找一条旅行路线, 通过每个顶点恰好一次又回到出发点. (**Hamilton 1857**)





Hamilton通路/回路

- G中Hamilton通路
  - 包含G中所有顶点
  - 通路上各顶点不重复
- G中Hamilton回路
  - 包含G中所有顶点
  - 除了起点与终点相同之外，通路上各顶点不重复。
- Hamilton回路与 Hamilton通路
  - Hamilton通路问题可转化为Hamilton回路问题

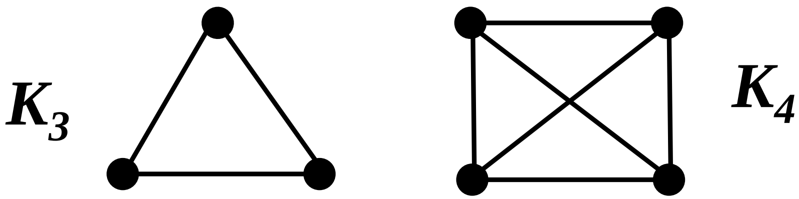
Hamilton回路的基本特性

- Hamilton回路:无重复地遍历图中诸点,

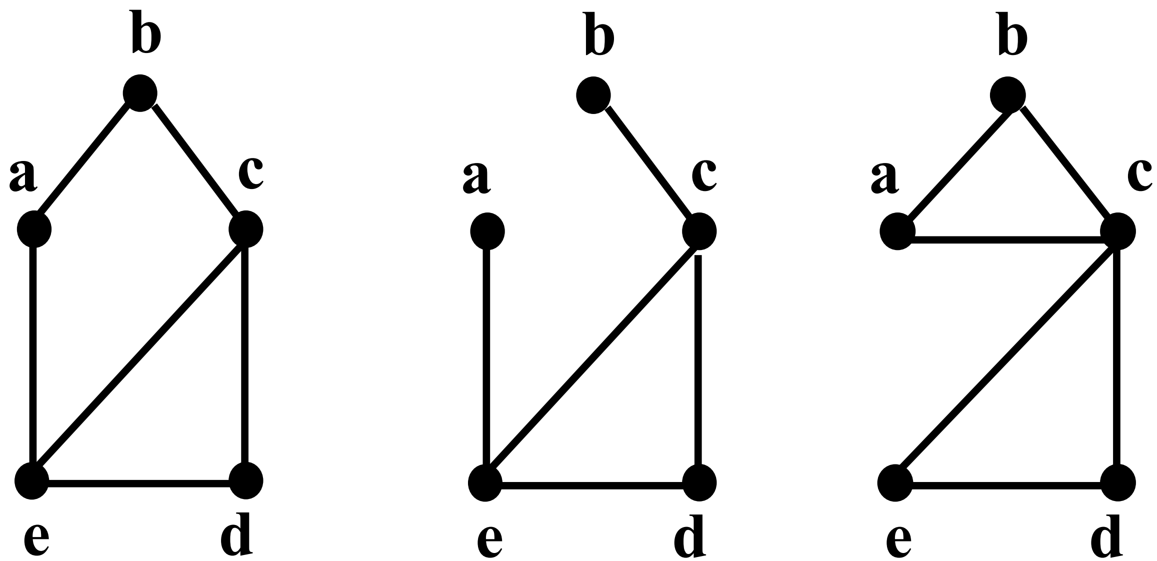
  Euler回路:无重复地遍历图中诸边.

- 若图G中有一顶点的度为1, 则无Hamilton回路.
- 设图G中有一顶点的度大于2, 若有Hamilton回路, 则只用其中的两条边.
- 若图中有n个顶点, 则Hamilton回路恰有n条边.
- 注：Hamilton回路问题主要针对简单图。

Hamilton回路的存在性问题



$K_n(n\geq3)$有Hamilton回路



一个基本的必要条件

- 如果图G=(V, E)是Hamilton图，则对V的任一非空子集S，都有

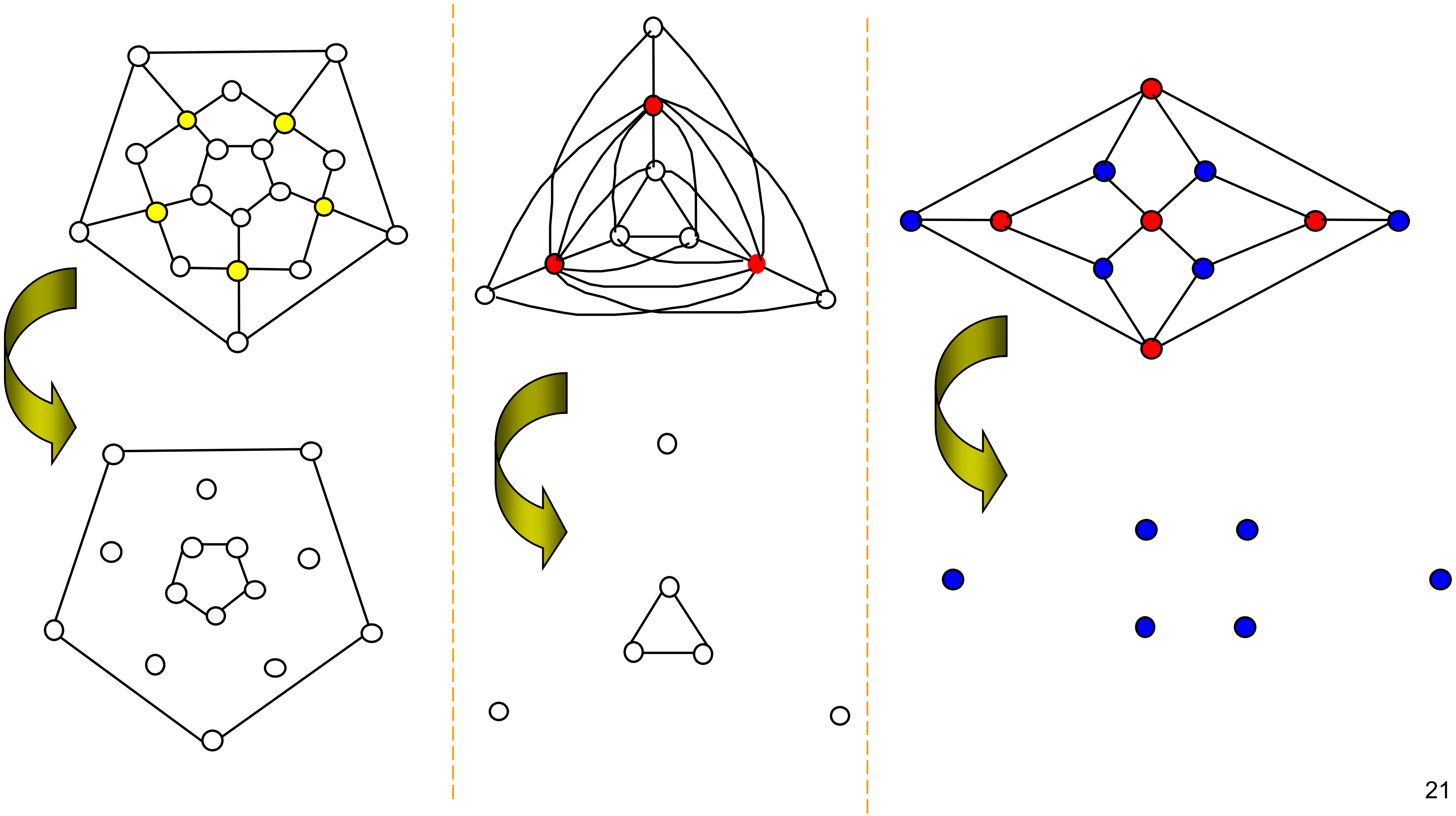
$$P(G\text{-}S) \leq |S|$$

其中， P(G-S)表示图G-S的连通分支数.

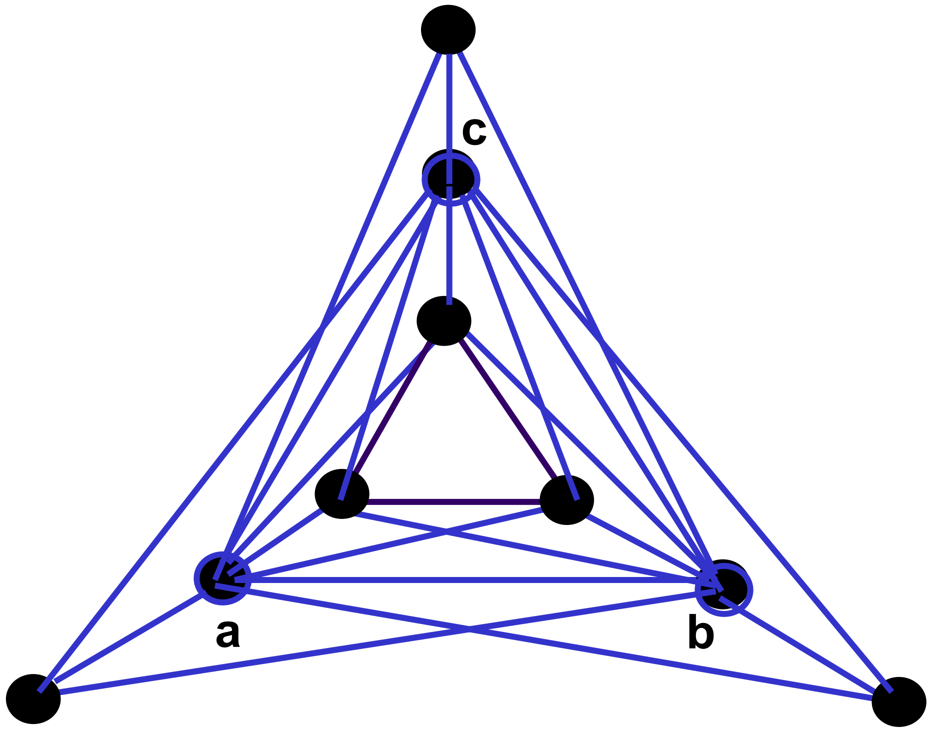
理由：设C是G中的Hamilton回路, $P(G\text{-}S) \leq P(C\text{-}S) \leq |S|$

向一个图中顶点之间加边不会增加连通分支。

必要条件的应用



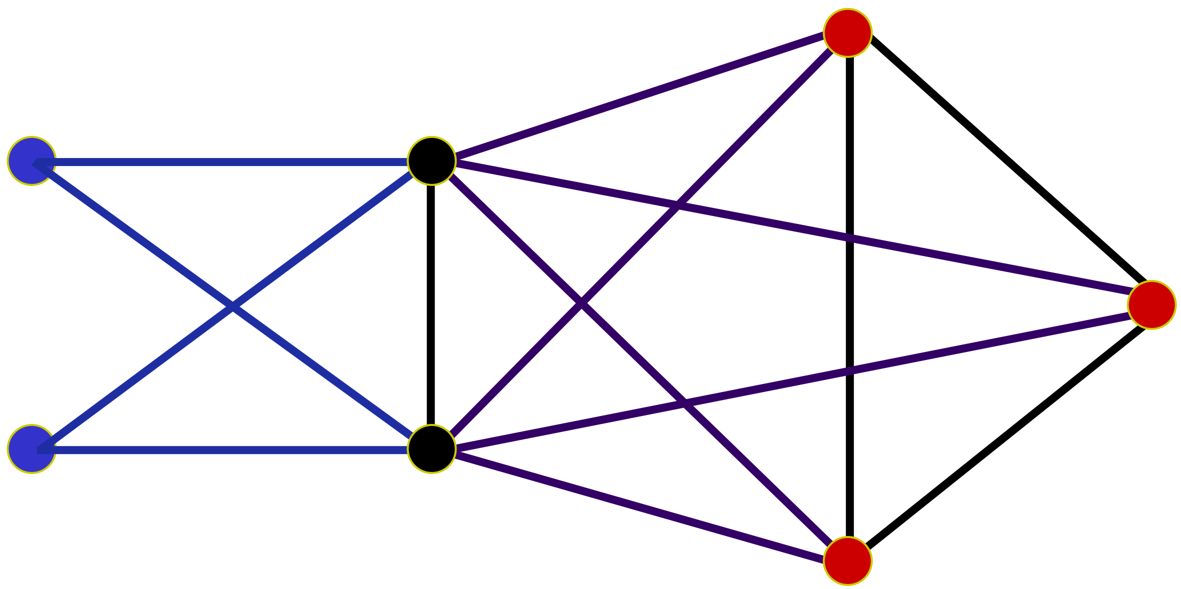
举例



将图中点a, b, c的集合记为S, G-S有4个连通分支,而|S|=3. G不是Hamilton图.

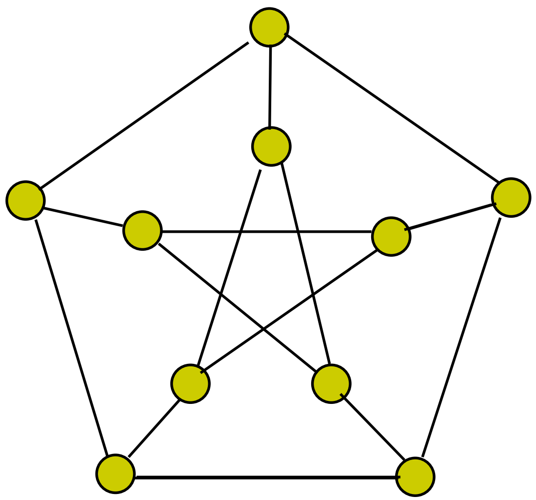
$$\overline{K_h} \longleftrightarrow K_h \longleftrightarrow K_{n-2h}$$

下图给出的是 $C_{2,7}$ 的具体图 (h=2,n=7)



必要条件的局限性

- 必要条件只能判定一个图不是哈密尔顿图
  - Petersen图满足上述必要条件，但不是哈密尔顿图。



哈密尔顿图的充分条件

- **Dirac定理（狄拉克, 1952）**

  设G是无向简单图，$|G|=n\geq 3$， 若$\delta(G)\geq n/2$，则G有哈密尔顿回图.

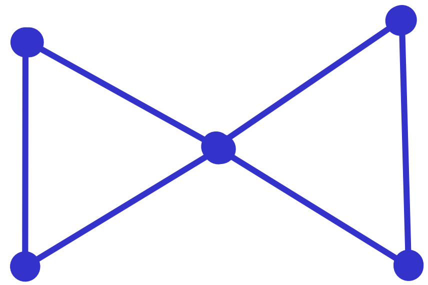
- **Ore定理（奥尔, 1960）**

  设G是无向简单图，$|G|=n\geq 3$ ， 若G中任意不相邻的顶点对u,v均满足： $d(u)+d(v)\geq n$ ，则G有哈密尔顿回图。

- 设G是无向简单图，$|G|=n\geq 2$，若G中任意不相邻的顶点对u,v均满足：$d(u)+d(v)\geq n-1$，则G是连通图。
  - 假设G不连通，则至少含2个连通分支，设为G_1，G_2。取$x\in V_{G1}$，$y\in V_{G2}$，则：$d(x)+d(y)\leq(n_1-1)+(n_2-1)\leq n-2$ (其中n_i是G_i的顶点个数)，矛盾。

充分条件的讨论

- “δ (G)≥ n/2”不能减弱为： δ (G)≥ $\lfloor n/2 \rfloor$
- 举例，n=5，δ (G)=2 . G不是Hamilton图.



- 存在哈密尔顿通路的充分条件（Ore定理的推论）

  设G是无向简单图，|G|=n≥2 ，若G中任意不相邻的顶点对u,v均满足： $d(u)+d(v)\geq n-1$ ，则G有哈密尔顿通路。

Ore定理的证明

- Ore定理（1960）

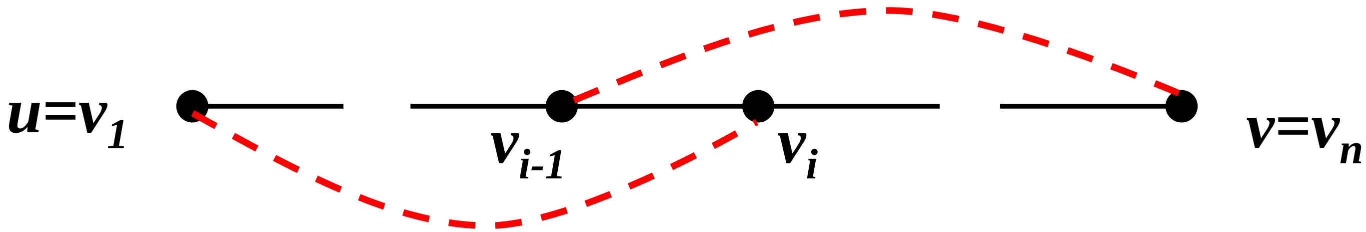
  设G是无向简单图，$|G|=n\geq 3$，若G中任意不相邻的顶点对u,v均满足：$d(u)+d(v)\geq n$，则G有哈密尔顿回图。

- 证明.反证法, 若存在满足（*）的图G，但是G没有Hamilton回路.

不妨假设G是边极大的非Hamilton图，且满足（*）。若G不是边极大的非Hamilton图，则可以不断地向G增加若干条边, 把G变成边极大的非Hamilton图G'，G'依然满足（*），因为对$\forall v\in V(G)$，$d_G(v)\leq d_{G'}(v)$。

Ore定理的证明

设u, v是G中不相邻的两点，于是G+uv是Hamilton图，且其中每条Hamilton回路都要通过边uv. 因此，G中有起点为u，终点为v的Hamilton通路:



不存在两个相邻的顶点 v_{i-1}和v_i,使得v_{i-1}与v相邻且v_i 与u相邻. 若不然, $(v_1,v_2, \ldots v_{i-1}, v_n, \ldots, v_i, v_1)$是G的Hamilton回路. 设在G中$u$与$v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ik}$相邻, 则$v$与$v_{i1-1}, v_{i2-1}, \ldots v_{ik-1}$都不相邻, 因此

d(u)+d(v) ≤k+n-1-k<n. 矛盾.

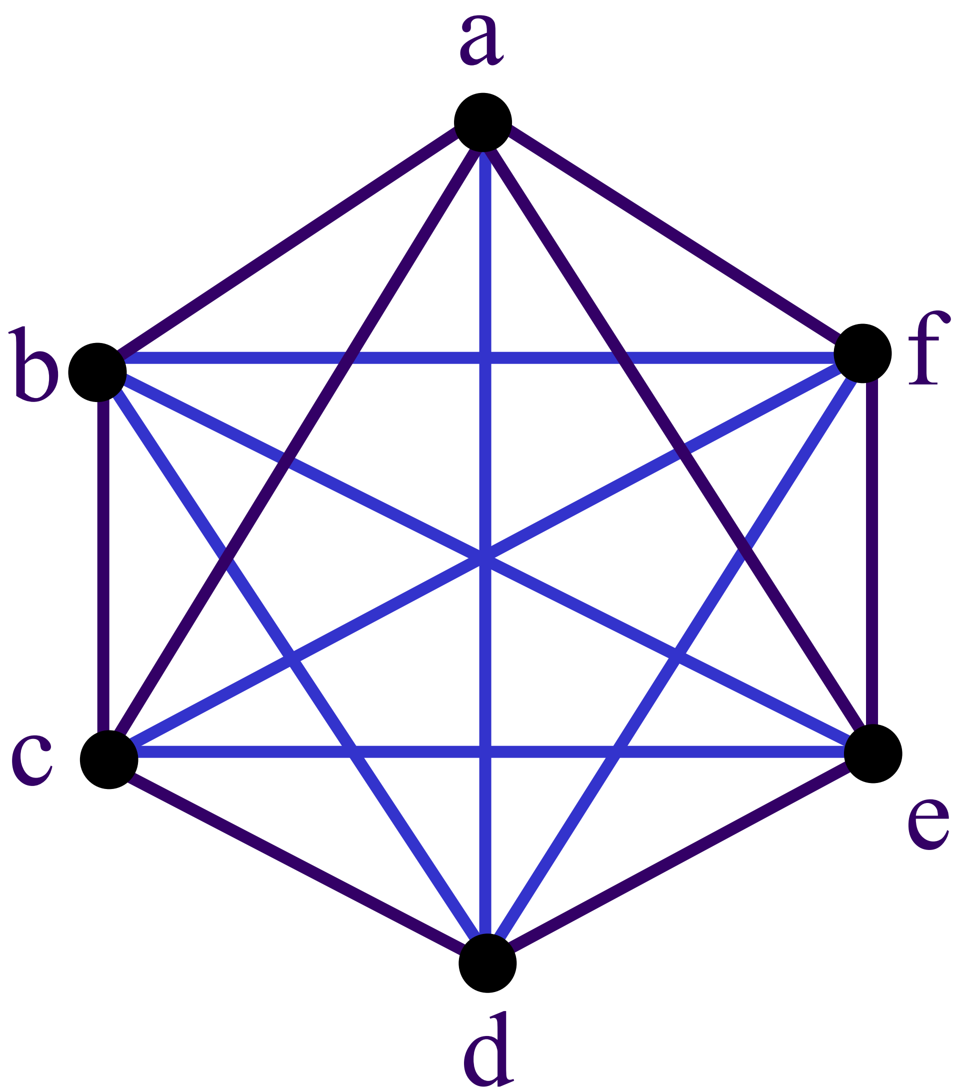
Ore定理的延伸

- 引理. 设G是有限图，u, v是G中不相邻的两个顶点，并且满足：$d(u)+d(v) \geq |G|$，则

  G是Hamilton图 $\Leftrightarrow$ iff 是$G \cup \{uv\}$是Hamilton图.
- 证明：类似于Ore定理的证明.

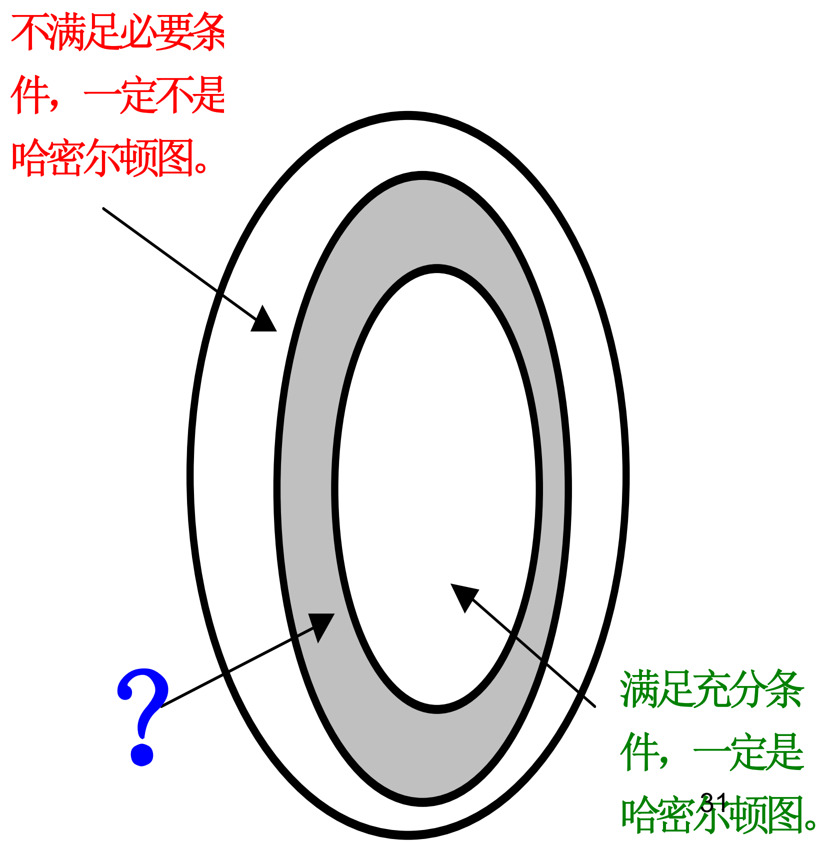
- G的闭合图, 记为C(G): 连接G中不相邻的并且其度之和不小于 |G| 的点对, 直到没有这样的点对为止.
- 有限图G是Hamilton图充分必要其闭合图C(G)是Hamilton图.

闭合图(举例)



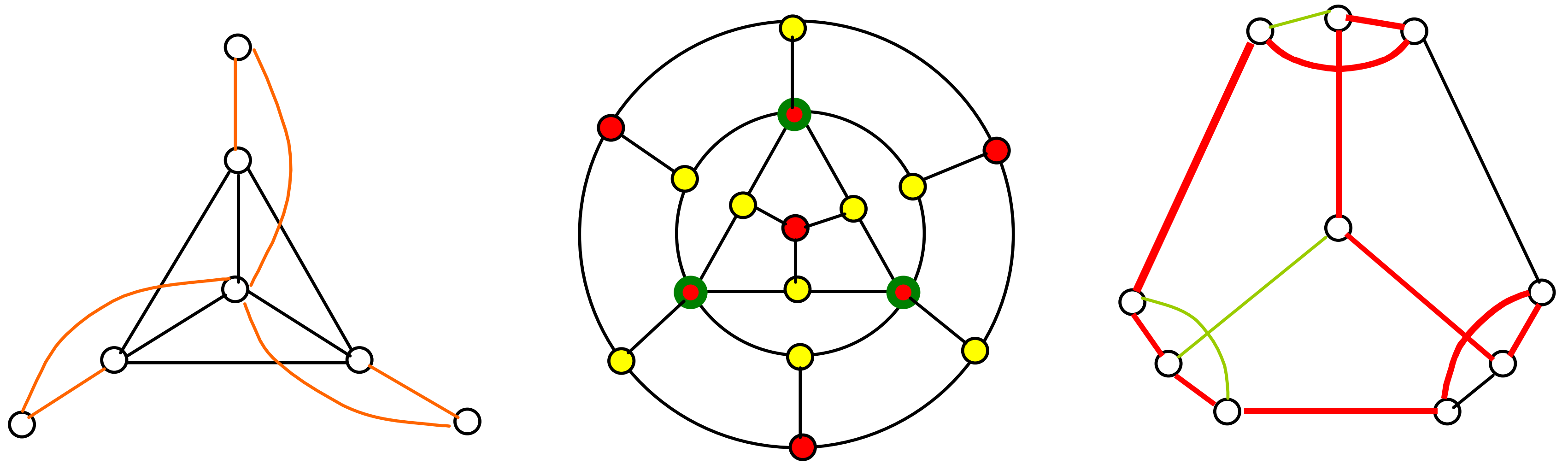
判定定理的盲区

- 从“常识”出发个案处理
  - 每点关联的边中恰有两条边在哈密尔顿回路中。
  - 哈密尔顿回路中不能含真子回路。
  - 利用对称性
  - 利用二部图特性
  - …



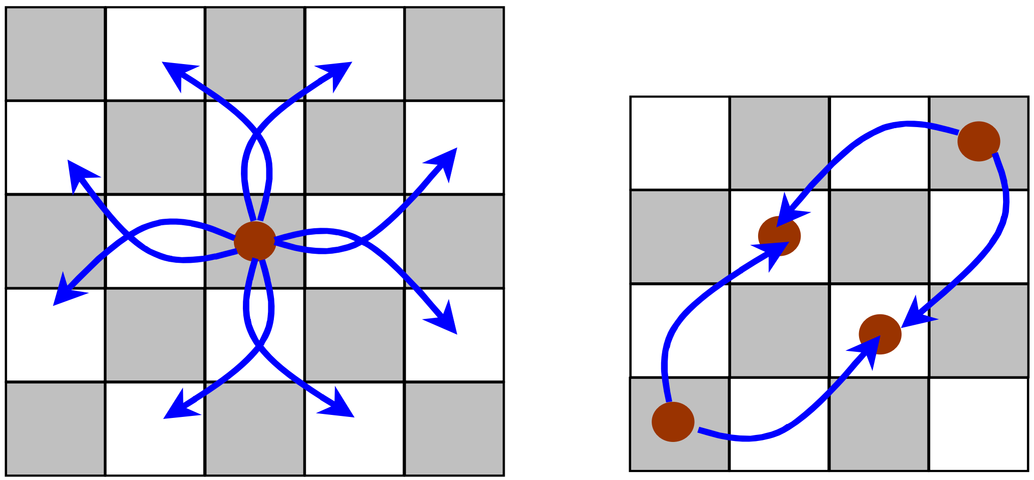
判定哈密尔顿图的例子

- 下列图中只有右图是哈密尔顿图。

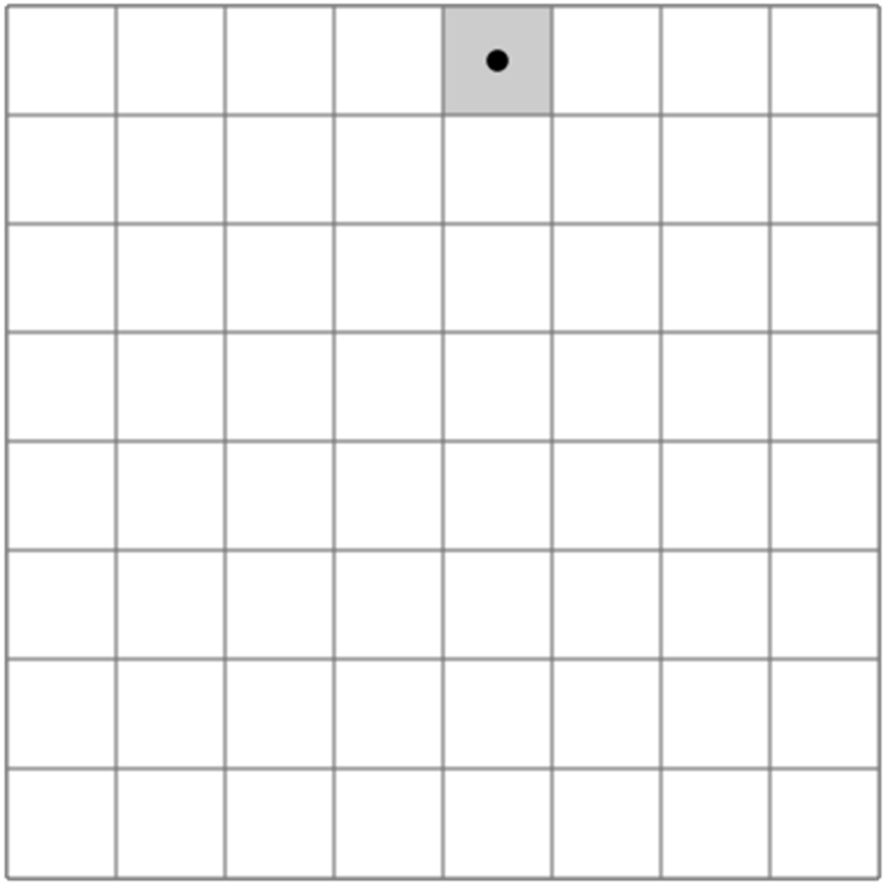


棋盘上的哈密尔顿回路问题

- 在4×4或5×5的缩小了的国际象棋棋盘上，马(Knight)不可能从某一格开始，跳过每个格子一次，并返回起点。



Knight's tour



From wikipedia

哈密尔顿图问题

- 基本问题
  - 判定哈密尔顿回路的存在性
  - 找出哈密尔顿回路/通路
- （在最坏情况下）时间复杂性为多项式的算法？
  - **NP-complete**